UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MSG473 - Teknik Kuantitatif Untuk Pengurusan II

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

BAHAGIAN I :

1. Pertimbangkan sistem giliran M/M/1 dengan kadar ketibaan λ dan kadar layanan μ.

   (a) Lukiskan gambar rajah kadar bagi sistem giliran itu.

   (b) Dengan menggunakan proses lahir-mati dan di bawah andaian bahawa sistem berkeadaan mantap, tunjukkan bahawa kebarangkalian sistem berkeadaan n dapat ditentukan secara berikut :

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (c) Seterusnya, tunjukkan bahawa keadaan purata sistem dapat ditentukan secara berikut :

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(35/100)

2. Sebuah kilang baru akan dibuka di Bayan Lepas. Salah satu daripada bahagian pengeluaran di kilang itu akan menggunakan mesin automatik dengan bilangan yang banyak. Mesin-mesin automatik itu memerlukan perkhidmatan operator untuk memunggah muatan yang telah siap diproses dan kemudiannya mengisi muatan yang baru kedalamnya untuk diproses berikutnya. Pihak pengurusan sedang menimbangkan berapa banyakkah mesin yang harus dikendalikan oleh seseorang operator. Maklumat yang ada adalah seperti berikut :

   - Masa purata pemprosesan sesuatu muatan oleh sesebuah mesin ialah 100 minit dengan mengikuti agihan eksponen.

. . /2

- Masa purata yang diperlukan oleh operator untuk memunggah dan kemudiannya mengisi semula sesuatu mesin dengan muatan yang baru ialah 10 minit dengan mengikuti agihan eksponen.

- Seseorang operator itu akan mengendalikan mesin-mesin yang ditugaskan kepadanya sahaja.

- Untuk memastikan bahawa permintaan bahan keluaran dapat dipenuhi, pada puratanya sekurang-kurangnya 87.5% daripada mesin mestilah sedang memproses muatan pada sesuatu masa.

Tentukan bilangan maksimum mesin yang harus ditugaskan kepada seseorang operator untuk memastikan bahawa permintaan bahan keluaran dapat dipenuhi.

(30/100)

3. Terdapat 3 talian telefon di tempat tempahan tiket MAS. Tempahan tiket di tempat itu boleh dibuat secara menelefon sahaja. Pihak pengurusan MAS sedang membuat pertimbangan tentang berapa orang petugas yang harus ditempatkan di tempat berkenaaan di antara pukul 8:00 pagi sehingga pukul 12:00 tengahari. Tujuan pihak pengurusan ialah untuk meminimumkan kos. Maklumat yang ada adalah seperti berikut :

- Ketibaan panggilan telefon di antara pukul 8:00 pagi sehingga 12:00 tengahari adalah mengikut proses Poisson dengan kadar 10 panggilah sejam.

- Masa melayan sesuatu panggilan adalah mengikut agihan eksponen dengan min 5 minit.

- Sesuatu panggilan yang tiba apabila kesemua petugas sedang sibuk akan diletakkan dalam status menunggu jika sekiranya masih ada talian yang tidak digunakan. Jika sekiranya semua talian digunakan, panggilan yang tiba berikutnya akan mendapat "isyarat sibuk". Pelanggan yang mendapat "isyarat sibuk" akan membuat tempahan ke tempat yang lain. Panggilan yang di dalam status menunggu tidak akan belah.

- Kos yang terlibat ialah :

  (i) pembayaran upah seseorang petugas ialah $5 sejam.

  (ii) pembayaran sewa talian telefon ialah $0.25 sejam.

  (iii) setiap panggilan yang tak dapat dilayan akan mengakibatkan kerugian jangka panjang $2.

  (iv) kos menunggu di dalam sistem ialah $1.00 sejam sepanggilan.

Tentukan bilangan petugas yang harus ditempatkan di tempat tempahan tiket itu.

(35/100)

. . ./3

BAHAGIAN II :

1. Jabatan Kebajikan Masyarakat sedang menimbangkan dua cara untuk memproses permohonan daripada orang ramai yang ingin mendapatkan bantuan kecemasan bencana alam.

   Cara 1 : Seseorang pelanggan yang tiba ke pejabat Jabatan itu akan dilayan oleh salah seorang daripada 4 kerani yang bertugas secara berasingan. Kerani akan mengisi borang untuk pelanggan berasaskan kepada maklumat yang diberikan secara lisan kepadanya. Masa pemprosesan seseorang pelanggan secara ini ialah mengikut agihan eksponen dengan min 45 minit. Seseorang pelanggan yang tiba apabila kesemua kerani sedang sibuk akan memasuki satu barisan menunggu.

   Cara 2 : Setiap pelanggan yang tiba ke pejabat akan dikehendaki mengisi sendiri borang yang disediakan. Masa yang diperlukan untuk mengisi sendiri borang ialah mengikuti agihan eksponen dengan min 65 minit. Apabila borang siap diisi, pelanggan akan memasuki satu barisan menunggu untuk menunggu giliran mereka dilayan oleh salah seorang daripada empat kerani yang ada itu. Kerani akan hanya menyemak borang yang telah diisi dan masa yang diperlukan untuk menyemak adalah mengikut agihan eksponan dengan min 5 minit.

   Jika ketibaan pelanggan adalah mengikut proses Poisson dengan kadar 4.8 pelanggan sejam, bandingkan dua cara itu berasaskan kepada

   (i) bilangan jangkaan pelanggan di dalam sistem.

   (ii) jangkaan masa seseorang pelanggan berada di dalam sistem.

   (iii) peratusan masa bersenang seseorang kerani.

(30/100)

2. Dua orang kerani yang sama cekap telah ditugaskan untuk mengendalikan sebuah pejabat agensi pelancongan. Setiap kerani itu berupaya melayan 5 pelanggan se jam dengan masa layan sebenar adalah mengikut agihan eksponen. Daripada data yang ada, didapati bahawa pelanggan tiba mengikut proses Poisson. Jika bilangan pelanggan yang sedang menunggu adalah tidak melebihi seorang, kadar ketibaan ialah 10 orang sejam. Jika bilangan pelanggan yang sedang menunggu adalah dua orang, kadar ketibaan ialah 5 orang sejam. Jika seseorang pelanggan itu tiba dan didapatinya terdapat tiga orang yang sedang menunggu, dia akan pergi ke tempat lain untuk berurusan.

   (a) Tentukan kebarangkalian bahawa seorang pelanggan yang tiba akan terus dilayan tanpa perlu menunggu terlebih dahulu.

   (b) Tentukan bilangan jangkaan pelanggan yang sedang menunggu.

   (c) Berapakah masa purata seseorang pelanggan itu terpaksa menunggu?

(40/100)

. . ./4

3. a) Salah satu daripada sifat penting agihan eksponen untuk kegunaan teori giliran adalah bahawa :

Nilai *minimum* di antara beberapa pembolehubah rawak eksponen tak bersandar akan mempunyai agihan eksponen.

b) Jelaskan maksud *sifat tanpa ingatan* agihan eksponen.

(30/100)

BAHAGIAN III :

1. Sebuah bengkel membaiki kenderaan mempunyai seorang mekanik yang bertanggungjawab terhadap lima buah kenderaan. Kenderaan yang mengalami kerosakan mesti dibaiki secepat mungkin. Taburan berikut telah didapati daripada data masa yang lalu.

Masa antara kerosakan untuk kenderaan (bulan)	Kebarangkalian %
2	10
3	15
4	5
5	30
6	15
7	25

Masa membaiki setiap kenderaan (hari)	Kebarangkalian %
3	40
4	50
5	10

Nombor-nombor rawak berikut digunakan bagi masa kerosakan dan masa membaiki.

Kerosakan : 76, 37, 60, 65, 53, 70, 14, 18, 48, 82

Membaiki : 20, 94, 45, 76, 57, 72, 71, 51, 25, 29

Simulasikan secara tangan 10 kerosakan dan pembaikan. Mulai dengan menentukan masa kerosakan pertama bagi setiap 5 buah kenderaan. Pembaikan ini bertindak secara dahulu didahulukan (FCFS). Jika lebih dari sebuah kenderaan menunggu untuk dibaiki, pilih salah satu untuk dibaiki seterusnya. Selepas 5 buah kenderaan dibaiki, tentukan masa kerosakan seterusnya sehingga 10 buah kenderaan dibaiki. Setengah kenderaan mungkin mengaalami kerosakan dua kali sebelum yang lain rosak. Tentukan masa menunggu, masa bersenang, jumlah masa di dalam sistem pembaikan dan bilangan di dalam giliran untuk setiap buah kenderaan.

(40/100)

. . ./5

2. Sally mempunyai sebuah kedai gunting dan seorang pembantu, Nancy. Masa yang diambil oleh Nancy untuk menggunting bergantung kepada bilangan pelanggan yang sedang menunggu. Lebih ramai pelanggan yang menunggu, lebih cepat Nancy bekerja. Corak layanan yang diberikan oleh Nancy ialah yang dahulu didahulukan (FCFS). Ketibaan pelanggan ke kedai gunting ini ialah secara bentuk Poisson dengan kadar min 12 orang sejam. Layanan dilakukan secara eksponen, tetapi min masa layanan bergantung kepada bilangan di dalam barisan. Taburan berikut adalah bagi bilangan pelanggan di dalam barisan dan masa layanan.

Bilangan dalam barisan	Min masa layanan (minit)
0	6.0
1 atau 2	5.5
3,4 atau 5	4.5
6 atau lebih	4.0

Binakan model GPSS untuk sistem ini agar ia dapat dilarikan untuk 100, 200, 300, 400 dan 500 layanan.

Lampiran : Fungsi bagi taburan eksponen.

```
XPDIS     FUNCTION     RN1,C24
0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.355/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/.75,1.38/.8,1.6
.84,1.83/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/.95,2.99/.96,3.2/.97,3.5
.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9998,8
```

(60/100)

oo0oo

Rumus-rumus bagi Teorem Giliran:

1. M/M/1 :

$$\rho = \lambda/\mu$$

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n \qquad \text{untuk} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad , \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$P[W > t] = e^{-t/W}$$

$$P[W_q > t] = \rho e^{-t/W}$$

2. M/M/s :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{(1 - \rho)} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & , \quad \text{jika} \quad 0 \leq n \leq s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\ s^{n-s}} P_0 & , \quad \text{jika} \quad n \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\ (1 - \rho)^2} P_0$$

.../2

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \qquad W = W_q + 1/\mu$$

$$L = L_q + \lambda/\mu$$

$$P[W_q > t] = \frac{P_0 \; s\mu \; (\lambda/\mu)^s}{s!(s\mu - \lambda)} \; e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

3. M/M/s dengan saiz sumber input terhad sebanyak M.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad \text{jika} \quad 0 \leq n \leq s \\ P_0 \binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad \text{jika} \quad s \leq n \leq M \\ 0 & , \quad \text{jika} \quad n > M \end{cases}$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=0}^{s-1} n\binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{m} n\binom{M}{n} \frac{n!}{s^{n-s} \; s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$L_q = L - s + P_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$W = \frac{L}{\lambda(M - L)} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda(M - L)}$$

4. M/G/1 :

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

5. $M/E_k/1$:

$$L_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1/\mu$$

$$L = \lambda W$$

6. Model M/M/1/k

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{k+1} & (\rho = 1) \end{cases}$$

Untuk $\rho \neq 1$

$$L = \frac{\rho[1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1}]}{(1-\rho^{k+1})(1-\rho)}$$

$$L_q = L - (1 - P_0) = L - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}$$

$$W = L/\lambda' \quad , \quad \lambda' = \mu(L - L_q)$$

$$W_q = W - 1/\mu = L_q/\lambda'$$

Untuk $\rho = 1$

$$L = \frac{k}{2}$$

7. Model M/M/s/k :

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (0 \leqslant n < s) \\[2ex] \dfrac{1}{s^{n-s}\, s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & (s \leqslant n \leqslant k) \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum\limits_{n=0}^{s-1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\, \dfrac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s+1}}{1 - \lambda/s\mu}\right]^{-1} & (\lambda/s\mu \neq 1) \\[3ex] \left[\sum\limits_{n=0}^{s-1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\,(k - s + 1)\right]^{-1} & (\lambda/s\mu = 1) \end{cases}$$

$$L_q = \frac{P_0 (s\rho)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1 - \rho^{k-s+1} - (1-\rho)(k-s+1)\rho^{k-s}\right]$$

$$L = L_q + s - P_0 \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s-n)(\rho s)^n}{n!}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} \quad , \qquad \lambda' = \lambda(1 - P_k)$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

8. Model M/M/s/s :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n/n!}{\sum\limits_{i=0}^{s} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \Big/ i!} \qquad (0 \leqslant n \leqslant s)$$

$$P_s = \frac{(s\rho)^s/s!}{\sum_{i=0}^{s} (s\rho)^i/i!} \qquad (\rho = \lambda/s\mu)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_s) \quad , \quad W = \frac{L}{\lambda'} \text{ dengan } \lambda' = \lambda(1 - P_s)$$

9. Model M/M/∞ :

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!} \qquad (n \geq 0)$$

$$L = \lambda/\mu \qquad W = \frac{1}{\mu}$$

10. Layanan Berkeadaan

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & (1 \leq n \leq k) \\ \mu & (n \geq k) \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\frac{1 - \rho_1^k}{1 - \rho_1} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}}{1 - \rho} \right]^{-1} \qquad (\rho_1 = \lambda/\mu_1, \ \rho = \lambda/\mu < 1)$$

$$L = P_0 \frac{\rho_1[1 + (k-1)\rho_1^k - k\rho_1^{k-1}]}{(1 - \rho_1)^2} + \frac{\rho\rho_1^{k-1}[k - (k-1)\rho]}{(1 - \rho)^2}$$

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1 - P_0}{\lambda}$$

11. M/M/1 dengan saiz sumber input terhad sebanyak M.

$$P_o = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_o \qquad \text{bagi} \quad n = 1,2,\ldots,M$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda} [1 - P_o]$$

$$L_q = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_o)$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} , \; W_q = \frac{L_q}{\lambda'} \qquad \text{dengan } \lambda' = \lambda(M - L)$$