UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MSG443 - Pemodelan Matematik

[Masa : 3 jam]

Jawab mana-mana **TIGA** soalan.

Pertukaran unit:

1 batu = 5280 kaki;	1 kaki = 0.3048 meter
1 MGD = 0.05262 m^3/s;	1 galon = 4.546ℓ.
1 lb = 0.4536 kg;	1 kg = 10^6mg = $10^9\mu$g.

1. (a) Dapatkan persamaan keterusan

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1}$$

bagi suatu saluran am dengan A = luas keratan rentas (m^2), Q = aliran air (m^3/s), t = masa (s), x = jarak (m). Seterusnya dapatkan persamaan gelombang tulin

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

bagi suatu saluran seragam dengan u = halaju air dan η = paras air atas paras purata. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk persamaan (2) dan (3) serta makna g dan h.

(b) Dapatkan bentuk penyelesaian umum bagi (2) dan (3), dan sahkan bahawa

$$\eta = a\cos(\sigma t - kx), \tag{4}$$

$$u = a\sqrt{\frac{g}{h}}\cos(\sigma t - kx), \tag{5}$$

../2

dengan $\sigma^2 = ghk^2$
ialah suatu penyelesaian (untuk gelombang menjalar misalnya Selat Barat, Pulau Pinang).

(c) Pertimbangkan suatu muara dengan geometri seragam. Biarkan h = 10 m, $g = 9.81\ ms^{-2}$. Bagi suatu pasang surut semi-harian (kalaan 12.42 jam) yang melalui muara di atas (b) dengan amplitud 1m, cari halaju maximum, nombor gelombang dan panjang gelombang.

(d) Pertimbangkan persamaan gelombang dengan rintangan linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad . \qquad (7)$$

Dapatkan penyelesaian analisis, dan bincangkan kesan-kesan rintangan linear ini. Berikan satu contoh untuk penjelasan.

(e) Bincangkan kesan kelikatan $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bagi suatu pasang surut dengan kalaan 12.42 jam, panjang gelombang 400 km di suatu muara dengan dalaman h = 10 m.

(100/100)

2. Gunakan prinsip keterusan isipadu bagi bahagian (a), (b), (c).

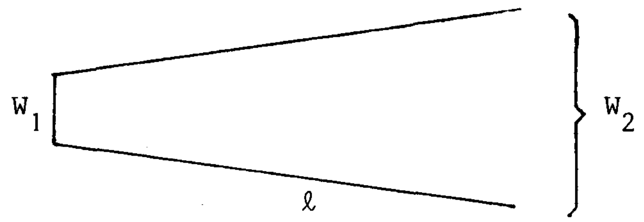
(a) Misalkan suatu saluran seragam dengan satu hujung A ditutup dan satu yang lain B terbuka ke laut (misalnya Selat Johor). Biarkan ℓ = panjang, w = lebar, d = dalam purata (dalam meter). Di hujung B, pasang surut semi-harian dengan frekuensi $\sigma\ s^{-1}$ masuk keluar saluran ini dengan amplitude a m.

(i) Dapatkan suatu rumus ringkas bagi halaju purata $\bar{v}$ dalam m/s pada hujung B dari paras air tinggi ke paras air rendah.

(ii) Biarkan ℓ = 30,000 m, a = 1.2 m, $\sigma = 2\pi/T$, T = 12.42 jam. Cari halaju purata $\bar{v}$ dan halaju maksimum pada B dan berikan rumus bagi halaju bersandaran masa pada B (dalam ms^{-1}).
Jelaskan dengan terang prinsip dan anggapan yang anda gunakan.

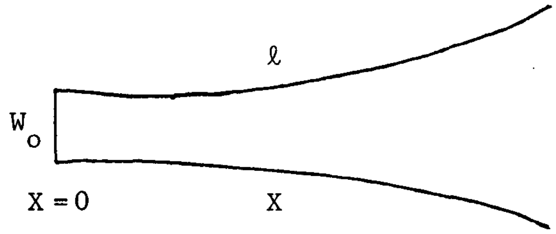
.../3

(b) Andaikan sekarang saluran di atas diubahsuai kepada yang berbentuk trapezium seperti berikut



Ulangi soalan (i) dan (ii) di bahagian (a) di atas.

(c) Andaikan bentuk saluran sekarang diubahsuai pula kepada bentuk eksponen seperti berikut



dimana lebar pada x diberikan oleh $w(x) = w_o e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$. Terangkan bagaimana soalan sekarang dapat diselesaikan. Jika $\alpha = 10^{-4}\ m^{-1}$, ulangi soalan (i) dan (ii) di bahagian (a).

(d) Berikan algoritma untuk menyelesaikan persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + Ru - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

bagi suatu saluran dengan satu hujung ditutup dan satu hujung terbuka (Misalnya Selat Johor). Jelaskan mengenai implementasi syarat awal dan syarat sempadan.

(100/100)

3. (a) Suatu muara seragam mempunyai pekali sebaran E = 5 smpd, halaju bersih u = 0.2 mpd dan aliran bersih Q = 800 cfs. Suatu bahan kimia abadi (iaitu kadar reputan $k = 0\ d^{-1}$) dibuang ke dalam muara pada tempat $x = 0$ pada kadar W kg d^{-1}.

(i) Tulis persamaan pembezaan bagi masalah di atas, serta syarat-syarat yang sesuai, dan selesaikannya.

(ii) Dapatkan penyelesaian unik bagi masalah di atas.

(iii) Jika kepekatan bahan tersebut pada X = -21 batu tidak boleh melebihi 8 mg/ℓ, cari kadar pembuangan W kgd^{-1} yang dibenarkan.

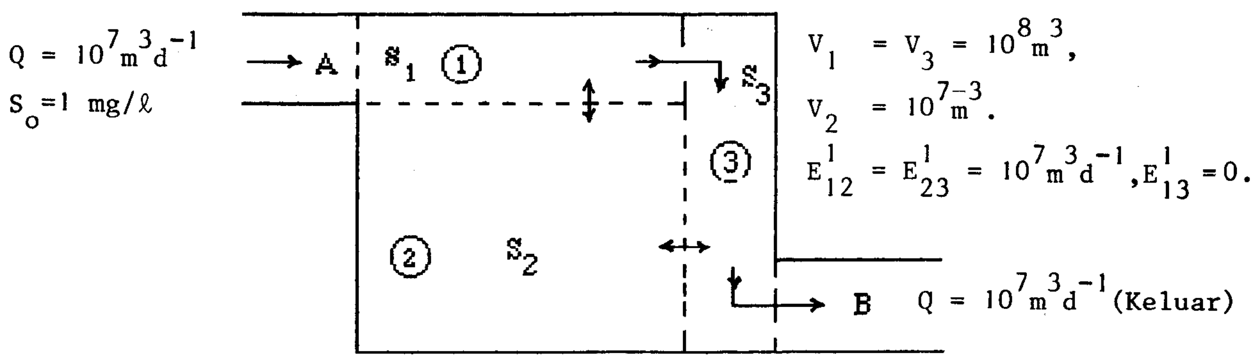
(b) Andaikan suatu muara seragam dengan aliran Q = 1000 cfs, luas keratan rentas $A = 50{,}000\ ft^2$, pekali sebaran E = 5 smpd. Suatu bahan kimia dengan kadar reputan $k = 0.1\ d^{-1}$ dibuang pada kadar $W = 1000\ lb\ d^{-1}$ pada X= 0 batu.

(i) Tulis persamaan pembezaan bagi masalah di atas serta syarat-syarat sesuai dan selesaikannya.

(ii) Dapatkan penyelesaian unik bagi (i) di atas dalam unit μg/ℓ dan lakarkan grafnya.

(iii) Cari kepekatan kimia pada X = 2 batu dan X = -2 batu dalam unit μg/ℓ .

(c) Rejah berikut adalah perwakilan 3 segmen bagi satu kawasan muara.



Air masuk segmen (1) melalui A dan disalurkan melalui segmen (3) kemudian keluar kawasan melalui B. Sebaran di antara segmen (3) dengan (1) adalah amat kecil dibandingkan dengan aliran $Q = 10^7 \text{ m}^3 \text{ d}^{-1}$. Air masuk pada A mempunyai kepekatan $s = 1$ mg/ℓ dengan kadar reputan 0.1 d^{-1}. Andaikan keadaan mantap tercapai.

(i) Jika pekali sebaran E_{12}^{1} dan E_{23}^{1} dianggarkan sama dengan $10^7 \text{ m}^3 \text{ d}^{-1}$, bentukkan persamaan-persamaan asas bagi kepekatan s_1, s_2 dan s_3 dalam bentuk matriks. Selesaikan matriks ini.

(ii) Jika kepekatan air pada B ialah 0.26 mg/ℓ, adakah anggaran sebaran $E_{12}^{1} = E_{23}^{1} = 10^7 \text{ m}^3 \text{ d}^{-1}$, $E_{13}^{1} \simeq 0$ memuaskan?

(d) Berikan algoritma yang lengkap untuk menyelesaikan persamaan pengangkutan-kinetik berikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = E\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V\frac{\partial c}{\partial x} - kc$$

melalui kaedah beza terhingga. Berikan penjelasan mengenai syarat awal dan syarat sempadan.

(100/100)

4. Anggapkan pekali sebaran $E = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ bagi soalan ini.

(a) Pertimbangkan model BOD - DO selepas keadaan mantap tercapai

$$0 = -v\frac{dL}{dx} - K_r L, \qquad (1)$$

$$0 = -v\frac{dC}{dx} - K_r L + K_a(C_s - C), \qquad (2)$$

dengan syarat $L = L_0$, $C = C_0$ pada $X = 0$, di mana L = kepekatan BOD, C = kepekatan DO, v = halaju, K_r = kadar reputan, K_a = kadar peranginan dan C_s = pemalar ketepuan. Tunjukkan $L = L_0 \exp(-K_r \frac{x}{v})$. Biarkan $D = C_s - C$, $D_o = C_s - C_o$ (defisit bagi DO). Tunjukkan bahawa defisit DO iaitu D, adalah diberikan oleh

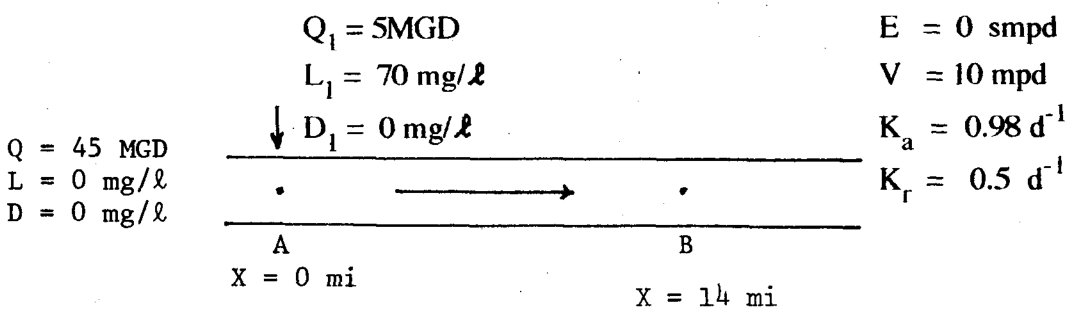
$$D = L_0\left(\frac{K_r}{K_a - K_r}\right)\left[\exp(-K_r \tfrac{x}{v}) - \exp(-K_a \tfrac{x}{v})\right] + D_0 \exp(-K_a \tfrac{x}{v}). \qquad (3)$$

Tunjukkan pula defisit D mencapai maksimum D_c apabila masa perjalanan genting $(t^* = \frac{x}{v})$ ialah

$$t_c^* = t^* = \left(\frac{1}{k_a - k_r}\right) \ln \left\{ \frac{K_a}{K_r}\left[1 - \frac{D_0(K_a - K_r)}{K_r L_0}\right] \right\}. \qquad (4)$$

$$\text{dan } D_c = \frac{K_r}{K_a} L_0 \exp(-K_r t_c^*) \qquad (5)$$

(b) Misalkan suatu sungai yang menerima BOD pada A seperti berikut.



Andaikan pekali E, V, K_a,K_r seperti diberikan di atas, dan keadaan mantap tercapai.

(i) Cari nilai L_0 selepas percampuran lengkap pada A.

(ii) Cari masa perjalanan genting t_c^*, serta x_c dan D_c.

(iii) Cari nilai L dan D pada x= 14 mi iaitu B.

(c) Kita rujuk kembali ke (b) di atas, dan andaikan sekarang sungai ini menerima pembuangan BOD kedua pada B pada kadar Q_2 = 10 MGD, L_2 = 40 mg/ℓ dan defisit D_2 = 4 mg/ℓ.

(i) Cari nilai L_0 dan D_0 selepas percampuran lengkap pada B.

(ii) Cari nilai t_c^*, x_c dan D_c akibat daripada kedua-dua pembuangan di A dan B.

(d) Berikan algoritma berangka untuk menyelesaikan model di bahagian (a) melalui kaedah segmen terhingga, dengan penjelasan yang mencukupi.

(100/100)

- oo0oo -