UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MSG441 - Pengiraan Kejuruteraan II

Masa : [3 jam]

Jawab EMPAT soalan.

1. [a] Kaedah Runge-Kutta peringkat 2 bagi menyelesaikan persaamaan $y'=f(x,y)$ dengan $y(x_0)=y_0$ boleh ditulis seperti berikut

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2$$

dengan
$$k_1 = hf(x_n , y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \alpha h , y_n + \beta k_1),$$

dan a, b, α, dan β adalah pemalar-pemalar. Tunjukkan bahawa pemalar-pemalar di atas mesti memenuhi

$$a + b = 1$$
$$b\alpha = b\beta = 1/2,$$

supaya kaedah ini bersesuaian dengan algoritma Taylor. Dengan memilih parameter yang sesuai, tunjukkan kaedah ini terturun kepada

(i) kaedah Euler
(ii) kaedah Euler diubahsuai.

[b] Dengan mengambil b = 2/3, cari y(2.2) bagi masalah

$$y' = \{\sqrt{(x^2 + 4y)} - x\}/2$$

dengan syarat awal y(2) = -1. Ambil h = 0.1.

[c] Tuliskan algoritma lengkap kaedah Runge-Kutta peringkat 2 bagi menyelesaikan persamaan pembezaan di atas.

(100/100)

.../2

2. [a] Tuliskan persamaan am bagi persamaan pembezaan separa peringkat 2. Terangkan dengan ringkas bagaimana persamaan ini dikelaskan ke dalam tiga jenis (iaitu parabolik dan lain-lain). Terangkan juga jenis masalah (seperti nilai sempadan , dan lain-lain) yang biasanya timbul bagi setiap jenis di atas. Berikan contoh-contoh dalam setiap kes.

[b] Jelaskan perhubungan cirian dengan jenis persamaan pembezaan separa di atas.

[c] Fungsi u adalah penyelesaian bagi persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - 3x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x = 0$$

dengan $u = x$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ pada $t=0$ dan $-\infty < x < \infty$.

Jika $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $q = \frac{\partial u}{\partial t}$, buktikan bahawa

$$3x\, dp + 3x dq - dy = 0,$$

sepanjang cirian dengan kecerunan $(-3x^2)$ dan

$$dp - 3x^2 dq + x dy = 0$$

sepanjang cirian dengan kecerunan 1.

Sahkan bahawa cirian garis lurus melalui A(0.4,0) bersilang dengan cirian yang melalui B(0.5,0) pada titik R(0.44,0.040).

Seterusnya cari penyelesaian pada titik R (hingga 3 tempat perpuluhan)

(100/100)

3. [a] Apakah yang dimaksudkan kaedah tersirat dan tak tersirat dalam menyelesaikan persamaan pembezaan separa.

   [b] Terangkan dengan ringkas kaedah Crank-Nicolson.

   [c] Diberi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (0 < x < 1)$$

   dengan

$$\begin{array}{rll} \text{(i)} & u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \; t \geq 0 \, , \\ \text{(ii)} & u(x,0) = 2x \, , & 0 \leq x \leq 0.5 \, , \\ \text{(iii)} & u(x,0) = 2(1-x) \, , & 0.5 \leq x \leq 1. \end{array}$$

   Dapatkan penyelesaian pada tahap masa pertama dengan mengambil $h = 0.2$ dan $r = 1$, menggunakan [b] di atas.

   [d] Jika kaedah berangka hendak digunakan, dalam menyelesaikan masalah [c] diatas, cadangkan satu kaedah yang sesuai digunakan dan tuliskan langkah-langkahnya.

(100/100)

4. [a] Terangkan konsep penumpuan dan kestabilan dalam menyelesaikan persamaan haba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\gamma}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

   [b] Diberi nilai eigen bagi matriks tiga pepenjuru berikut

$$\begin{bmatrix} a & b & & & & & \\ c & a & b & & & & \\ & c & a & b & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & c & a & b \\ & & & & & c & a \end{bmatrix}_{(N \times N)}$$

.../4

adalah

$$\lambda_s = a + 2\{\sqrt{(bc)}\}\cos(\frac{s\pi}{N+1}) \quad , \; s = 1,2, \ldots , N$$

dan $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Andaikan kaedah tak tersirat digunakan untuk menyelesaikan persamaan haba di atas dan ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$U^{j+1} = AU^j \; ,$$

yang mana U adalah vektor berdimensi N-1. Carilah matriks A. Seterusnya tunjukkan bahawa nilai eigen bagi A adalah

$$1 - 4r\sin^2(\frac{s\pi}{2N}) \; , \; s=1,2,\ldots,N-1,$$

dengan $r = \frac{\gamma k}{c\rho h}$, h adalah lebar selang x dan k lebar selang bagi t. Seterusnya tunjukkan kaedah ini stabil jika $r \le 0.5$.

(100/100)

5. [a] Diberi sistem persamaan linear

$$Ax = b$$

yang mana A adalah matriks N x N dengan unsur-unsur a_{ij} , x adalah matriks lajur dengan unsur x_i dan b matriks lajur dengan b_i. Bermula dengan kaedah Jacobi dan Gauss-Seidel, dapatkan rumus bagi kaedah pengenduran lampau berturut-turut (Successive over-relaxation method).

.../5

[b] Diberi persamaan aliran haba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -16$$

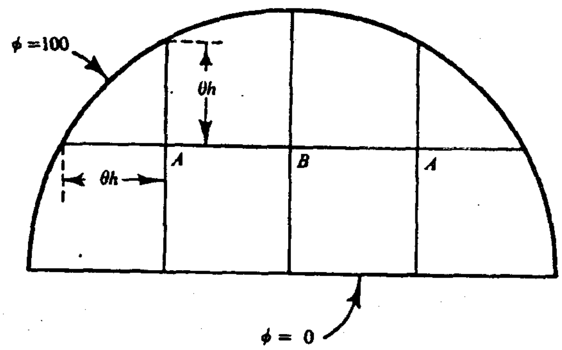
di dalam rantau $-1 < x < 1$ dan $-1 < y < 1$ memenuhi syarat sempadan

$$u(-1,y) = u(1,y) = 0\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = -u \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y}(x,-1) = u.$$

Dengan mengambil $h = 1/4$, dapatkan rumus persamaan beza terhingga bagi menyelesaikan persamaan aliran di atas. Seterusnya tuliskan sistem persamaan ini dalam bentuk matriks (jangan selesaikan).

[c] Rantau penyelesaian bagi persamaan Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ adalah rantau tertutup yang dibatasi oleh semibulatan berjejari 2h dengan syarat-syarat sempadan seperti di bawah



Dapatkan rumus pengiraan pada titik A. Seterusnya dapatkan penyelesaian pada titik A dan B.

(100/100)

- oooOOOooo -