UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MKT342 - Pengiraan Kejuruteraan II

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Tunjukkan bahawa

$$\Delta^k f(x_i) = f(x_{i+k}) - \binom{k}{1} f(x_{i+k-1}) + \binom{k}{2} f(x_{i+k-2})$$
$$+ \dots + (-1)^k f(x_i)$$

yang mana $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$.

(b) Bagi sistem persamaan

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dapatkan jejari spektrum matriks lelaran untuk kaedah

(i) Jacobi
(ii) Gauss-Seidel.

(c) Bincangkan mengenai

(i) Kaedah kuasa
(ii) Kaedah Crank-Nicolson .

(100/100)

.../2

2. (a) Gunakan kaedah Newton untuk menghampirkan penyelesaian sistem berikut:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 = 0$$

$$g(x, y) = x^2 + xy = 0 .$$

Gunakan $x_0 = -2$, $y_0 = 1.5$ dan jalankan satu lelaran sahaja.

(b) Jika $y_1(x)$ merupakan penyelesaian bagi

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$$
$$a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0$$

dan $y_2(x)$ merupakan penyelesaian bagi

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$
$$a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1 .$$

Buktikan bahawa

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$$

merupakan penyelesaian masalah nilai sempadan

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x)$$
$$a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Bincangkan bagaimana kita dapat menyelesaikan masalah nilai sempadan tersebut.

(c) Terangkan bagaimana anda dapat menyelesaikan secara berangka masalah awalan

$$y'' + 2xy' + x^2y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 .$$

(100/100)

.../3

3. (a) Fungsi V menepati persamaan tak linear

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

dengan syarat awalan $V(x, 0) = 0$ dan syarat sempadan

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 \text{ pada } x = 0, \ t > 0$$

$$V = 0 \text{ pada } x = 1, \ t > 0 .$$

Dengan menggunakan pertukaran pembolehubah $V = \ell n\, U$, $U \neq 0$, tunjukkan bahawa persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

dengan syarat awalan $U(x, 0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, dan syarat sempadan

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U \text{ pada } x = 0, t > 0$$

dan $U = 1$ pada $x = 1, t > 0$.
Dengan menggunakan $\delta x = 0.1$ dan $\delta t = 0.0025$ pada kaedah tak tersirat, dapatkan penghampiran penyelesaian V pada titik (0, 0.005).

(b) Buktikan dengan menggunakan kaedah matriks bahawa persamaan beza terhingga

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = r\{\theta(U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}) + (1-\theta)(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})\}$$

yang menganggar persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

stabil tak bersyarat apabila $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

.../4

Petunjuk:

(i) Anggapkan nilai sempadan diberikan.

(ii) Bagi suatu matriks $A \varepsilon M_{nxn}$

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & & \ddots & & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}$$

nilai-nilai eigen A, λ_s, diberikan oleh persamaan

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \text{ kos } \frac{s\pi}{n+1} \quad , \quad s = 1, \ldots, n \; .$$

(100/100)

4. (a) Persamaan

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$

dianggarkan pada titik (ih, jk) oleh persamaan beza terhingga

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} - \frac{U_{i+1,j} - 2\{\theta U_{i,j+1} + (1-\theta)U_{i,j-1}\} + U_{i-1,j}}{h^2} = 0.$$

Tunjukkan bahawa ralat pangkasan tempatan pada titik ini ialah

$$\frac{k^2}{6}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 U}{\partial x^2} + (2\theta-1)\frac{2k}{h^2}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{k^2}{h^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + O\left(\frac{k^3}{h^2}, h^4, k^4\right) .$$

Bincangkan mengenai kekonsistenan skema ini terhadap persamaan pembezaan di atas apabila $k = rh^2$ yang mana r adalah suatu malar positif dan θ parameter pembolehubah.

.../5

(b) Fungsi ϕ menepati persamaan

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

pada setiap titik segiempat sama yang terbatas oleh garislurus $x = \pm 1$ dan $y = \pm 1$, dan mempunyai nilai sifar pada setiap sempadan. Dengan menggunakan kaedah beza terhingga dan jaringan segiempat sama dengan saiznya $\frac{1}{2}$, dapatkan penyelesaiannya.

(100/100)

- oooOOooo -