

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1989/90

Mac/April 1990

MKT341 - Pengiraan Kejuruteraan I

Masa: [3 jam]

Jawab EMPAT soalan.

1. (a) Jika persamaan tak linear $f(x)=0$ mempunyai suatu punca ganda tiga r (iaitu $f(r)=f'(r)=f''(r)=0$), tentukan sama ada proses lelaran yang berasaskan rumus

$$x_{n+1} = x_n - 3 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

menumpu secara linear atau kuadratik.

- (b) Buktikan bahawa persamaan $x^2 - e^{2x} - 1 = 0$ mempunyai satu punca sahaja di dalam selang $(-2, -1)$. Tunjukkan bahawa persamaan ini boleh ditulis di dalam bentuk

(i) $x = g_1(x) = - \left[1 + e^{2x} \right]^{1/2}$

(ii) $x = g_2(x) = (1/2) \log_e (x^2 - 1)$

Tanpa menjalankan proses lelaran, tentukan sama ada g_1 atau g_2 yang lebih sesuai untuk menentukan punca persamaan di atas. Jalankan 3 lelaran dengan menggunakan fungsi yang lebih sesuai itu.

(100/100)

2. (a) Terangkan algoritma bagi Kaedah Perbaikan Lelaran yang digunakan untuk memperbaiki kejituan penyelesaian sistem-sistem persamaan linear.

.../2

- (b) Di dalam kaedah tak langsung, sistem linear $Ax = b$ boleh ditulis di dalam bentuk

$$x = \alpha x + \beta$$

dengan α sebagai suatu matriks dan β suatu vektor. Nyatakan suatu syarat cukup bagi matriks α supaya proses lelaran

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$$

($k = 0, 1, 2, \dots$) akan menumpu.

Buktikan anggaran ralat berikut

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$x^{(0)}$ ialah vektor hampiran awal.

Dapatkan rumus yang sepadan jika $x^{(0)}$ dipilih sebagai vektor β .

- (c) Selesaikan sistem berikut dengan kaedah Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} 0.09x_1 + 3.00x_2 - 0.15x_3 - 0.12x_4 &= 9 \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4.00x_3 + 0.06x_4 &= 20 \\ 4.00x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 + 0.16x_4 &= 8 \\ 0.02x_1 + 0.06x_2 + 0.04x_3 - 10.00x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Jalankan tiga lelaran. Gunakan rumus di dalam bahagian (b) untuk menganggar bilangan lelaran yang diperlukan jika kejituan 5 tempat perpuluhan dikehendaki.

(100/100)

3. (a) Tentukan nilai f pada titik $x = 0.67$:

x_i	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68
f_i	0.745	0.760	0.776	?	0.809

Gunakan semua nilai jadual di dalam pengiraan anda.

.../3

(b) Pertimbangkan jadual

x_i	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
f_i	4.457	5.466	6.695	8.198	10.018

Tentukan x jika $f(x) = 5$.

(c) Pertimbangkan suatu jadual untuk $\cos x$ dengan nilai x di dalam selang $[0.1, 0.5]$ dan $h = 0.05$. Apakah ralat terbesar jika interpolasi linear digunakan untuk menganggarkan nilai-nilai $\cos x$ dengan menggunakan jadual ini?

(100/100)

4. (a) Dengan menggunakan rumus interpolasi ke depan Newton-Gregory, buktikan rumus pembezaan berangka berikut

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \dots]$$

Anggarkan $f'(0.0)$ dan $f''(0.0)$ dari jadual berikut:

x_i	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
f_i	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110

(b) Gunakan petua trapezium terperluas untuk menilaikan kamiran

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

dengan $n = 5$ (iaitu 5 subselang). Anggarkan nilai n jika kejituan 6 tempat perpuluhan diperlukan.

Apakah n jika petua $1/3$ Simpson digunakan dan kejituan yang sama perlu dicapai?

(100/100)

.../4

5. (a) Terangkan dengan ringkas dan berikan contoh:

- (i) masalah nilai awal
- (ii) kaedah peramal-pembetul
- (iii) kaedah satu-langkah
- (iv) kaedah multi-langkah
- (v) peringkat kaedah

(b) Gunakan kaedah Runge-Kutta untuk memperolehi penyelesaian masalah berikut

$$y' = y - x, \quad y(0) = 1.5$$

pada $x = 0.2$. Gunakan saiz langkah $h = 0.2$.

(c) Tulis suatu program komputer yang menggunakan kaedah Runge-Kutta untuk menyelesaikan masalah di dalam bahagian (b) jika penyelesaian dikehendaki pada selang $[0,2]$ dan $h = 0.2$.

(100/100)

- ooo000ooo -

Rumus-Rumus

1.
$$x_i^{(m+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)}$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$
2.
$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$
3.
$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3} \Delta^3 f_{-3} + \binom{s+3}{4} \Delta^4 f_{-4} + \dots$$
4.
$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4} \Delta^4 f_{-2} + \dots$$
5.
$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x) \text{ dengan } \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \quad 0 \leq i \leq n.$$
6.
$$f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta^n f_0)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$$
7.
$$Q = F(h) + Ch^n + O(h^m)$$

$$Q \approx \frac{r^n F(h) - F(h_b)}{r^n - 1}, \quad h_b = rh \quad (r > 1)$$
8. Ralat sejagat petua trapezium

$$= -\frac{1}{12} (b-a) h^2 f''(\xi)$$
9.
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3} h (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + \dots + 2f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$
10.
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3}{8} h (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 3f_6 + \dots + 2f_{n-2} + 3f_{n-1} + 3f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$$
11.
$$y_{n+1} = y_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6.0$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1)$$

$$K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

$$12. \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

$$13. \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$