

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MKT 241 - Kalkulus Gunaan

Masa : [3 jam]

Kertas ini mengandungi **LIMA** soalan. Jawab **SEMUA** soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Diberikan teorem-teorem berikut:

Teorem A:

Jika sesuatu jujukan itu dibatasi, ianya menumpu.

Teorem B:

Jika sesuatu jujukan itu menumpu, ianya dibatasi.

- (i) Buktikan teorem yang benar dan berikan satu contoh lawan bagi teorem yang palsu.
- (ii) Bagaimanakah caranya untuk memperbaiki teorem yang palsu?

(40/100)

(b) Diberi

$$0 < a < 2 .$$

(i) Buktikan bahawa

$$a < \sqrt{2a} < 2 .$$

(ii) Pertimbangkan jujukan berikut:

$$\sqrt{2} , \sqrt{2\sqrt{2}} , \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} , \dots ,$$

Tunjukkan yang jujukan ini menumpu.

(30/100)

.... /2

- (c) Dapatkan had bagi jujukan berikut apabila n menuju ke takterhingga:

$$z_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}.$$

(30/100)

2. (a) Tentukan sama ada siri berikut menumpu secara mutlak, menumpu secara bersyarat atau mencapai:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

(45/100)

- (b) Katakan $\sum a_k x^k$ adalah suatu siri kuasa dan r adalah jejari penumpuannya. Diberikan bahawa $|a_{k+1} / a_k| \rightarrow \lambda$, tunjukkan bahawa

jika $\lambda \neq 0$, maka $r = 1/\lambda$ dan
jika $\lambda = 0$, maka $r = \infty$.

(30/100)

- (c) Kembangkan e^x dalam kuasa $x-a$.

(25/100)

3. (a) Katakan $u = u(x, y)$, $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$. Dapatkan

$$(i) \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$(ii) \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

(30/100)

.../3

- 3 -

- (b) Suatu pepejal segiempat tepat pada oktan pertama mempunyai satu bucu di asalan dan bucu bertentangnya pada satah $x/a + y/b + z/c = 1$. ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$). Maksimumkan isipadu pepejal tersebut.

(30/100)

- (c) Diberikan $z = (x-y)(x+y)^{-1}$, gunakan dz untuk menganggar pertukaran dalam z jika x bertambah dari 4 ke $4\frac{1}{10}$ dan y bertambah dari 2 ke $2\frac{1}{10}$. Apakah pertukaran sebenar bagi z ?

(40/100)

4. (a) Andaikan $V = \int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 \sqrt{x^2 + y^2} dydx$.

- (i) Lakarkan rantau pengamiran.
 (ii) Gunakan koordinat kutub untuk menilai V .

(30/100)

- (b) D ialah rantau yang dibatasi oleh graf-graf $x = \sqrt{y}$, $y = -x$ dan $y = 4 - 3x$.

- (i) Lakarkan rantau D .
 (ii) Dapatkan luas D .
 (iii) Dapatkan jisim lamina yang mempunyai bentuk rantau D jika ketumpatan pada titik $P(x, y)$ berkadaran terus dengan jarak P ke paksi y .

(40/100)

- (c) Lakarkan pepejal di dalam oktan pertama yang dibatasi oleh satah $y + z = 4$, silinder parabolik $y = x^2$, satah xy dan satah yz . Dapatkan isipadu pepejal tersebut.

(30/100)

.../4

5. (a) Selesaikan setiap persamaan berikut:

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

$$(ii) \quad 2ydx - xdy = 0$$

$$(iii) \quad \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x}$$

(30/100)

(b) Dengan menggunakan kaedah pekali belum tentu, dapatkan penyelesaian am bagi persamaan pembezaan

$$y'' + 4y = xe^x + x \sin 2x .$$

(30/100)

(c) Tentusahkan bahawa $(1+x)$ dan e^x adalah penyelesaian bagi persamaan homogen yang bersepadanan dengan

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x > 0 .$$

Seterusnya dapatkan penyelesaian am bagi persamaan tersebut.

(40/100)