

MAT468 = Proses Stokastik Gunaan

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Katakan $\{X_n\}$ ialah suatu rantai Markov dengan ruang keadaan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan matriks peralihan

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Pisahkan S kepada kelas-kelas kesetaraan dan tentukan ia tertutup atau tidak.
- (ii) Hitungkan $P(X_2=3, X_1=4 \mid X_0=4)$.
- (iii) Hitungkan $P(X_4=2, X_2=2, X_1=1)$. Anggapkan bahawa vektor kebarangkalian awal ialah $a'_0 = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$.

(50/100)

- (b) Pulau Pinang mempunyai tiga restoran yang digemari: Macdonald (1), Kentucky Fried Chicken (2), dan A & W (3). Diamati bahawa pelanggan yang selalu mengunjungi restoran ini tidak selalu mengunjungi restoran yang sama tiap-tiap minggu. Katakan X_n ialah restoran yang dikunjungi pada minggu ke- n dan anggapkan $\{X_n\}$ ialah suatu rantai Markov dengan matriks peralihan P .

.../2

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 2/5 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Katakan pembahagian pelanggan pada minggu pertama ialah 40% bagi Macdonald (1), 40% bagi Kentucky Fried Chicken (2), dan 20% bagi A & W, ramalkan taburan pembahagian pada minggu ketiga.

Pada lama-kelamaan, berapa peratuskanh pelanggan akan mengunjungi Macdonald?

(50/100)

2. (a) Kursus diploma di sebuah maktab tempatan mengambil masa 3 tahun. Setiap tahun, seorang pelajar mempunyai kebarangkalian 0.2 untuk dikeluarkan dari maktab, kebarangkalian 0.1 untuk mengulangi tahun tertentu dan kebarangkalian 0.7 untuk mara ke tahun yang berikut.

- (i) Bentukkan matriks untuk proses ini dengan keadaan S, G, 1, 2, 3, di sini keadaan S ialah keadaan pelajar dikeluarkan dari maktab, G ialah keadaan pelajar berijazah dan keadaan yang lain ialah tahun pelajaran.
- (ii) Dapatkan matriks pokok N. Berapa lamakah seorang pelajar pertama dijangka berada di dalam maktab?
- (iii) Berapakah kebarangkalian seorang pelajar pertama akan berijazah?

(60/100)

- (b) Katakan P ialah matriks peralihan bagi suatu rantai Markov dan lajur ke-j dari matriks P^m tidak mempunyai sifar. Tunjukkan lajur ke-j dari matrik P^{m+1} tidak mempunyai sifar dan kemudian tunjukkan kala bagi keadaan j ialah satu.

(40/100)

.../3

3. (a) Pertimbangkan suatu proses bercabang dengan P_k (kebarangkalian suatu individu melahirkan k anak) seperti berikut:

$$P_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (3/4)^k (1/4)^{3-k}, & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & k = 4, 5, \dots \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa kebarangkalian pemusnahan ialah $\frac{2\sqrt{21}}{9} - 1$.

(40/100)

- (b) Yang berikut ialah suatu matriks peralihan bagi suatu rantai Markov yang takterturunkan dengan ruang keadaan $S = \{1, 2, 3, \dots\}$. Tunjukkan bahawa keadaannya adalah jadi semula positif.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Sebutkan syarat-syarat yang mesti dipenuhi supaya suatu rantai Markov mempunyai taburan lama-kelamaan. Cari taburan lama-kelamaan untuk rantai di atas jika wujud.

(60/100)

4. (a) Andaikan bahawa zarah dipancar daripada suatu bahan radioaktif dan bilangan zarah yang dipancar mengikut suatu proses Poisson dengan kadar λ seminit.

- (i) Berapakah kebarangkalian lebih dari tiga zarah dipancar di dalam dua minit jika $\lambda = 1$?
- (ii) Berapakah kebarangkalian bahawa masa di antara ketibaan dua zarah berturut-turut besar daripada 2 minit jika $\lambda = 1$?
- (iii) Andaikan pula kaunter Geiger yang digunakan kadangkala gagal merekodkan zarah yang dipancar. Terutamanya, suatu zarah mempunyai kebarangkalian p untuk direkodkan. Jika $Y(t)$ ialah bilangan zarah yang direkodkan pada masa $(0, t]$, dapatkan $P(Y(t)=k)$ dan tunjukkan $E(Y(t)) = \lambda pt$.

(50/100)

.../4

- (b) Dengan andaian di mana ketibaan dan layanan bagi sebuah sistem adalah mengikut proses Poisson, dan hanya satu pelayan diadakan, tunjukkan bahawa:

$E(j)$, jangkaan didapati j pelanggan berada di dalam sistem;
 $E(w)$, jangkaan didapati w pelanggan menunggu dalam giliran;
 W_Q , purata masa menunggu di dalam giliran;
 W , purata masa pelanggan berada di dalam sistem;

adalah seperti berikut:

$$E(j) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$E(w) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

(50/100)

5. Di sebuah universiti, perlantikan pensyarah-pensyarah dikaji semula pada setiap tahun. Peraturan yang diikuti adalah seperti berikut:

- (i) Pensyarah bertaraf tetap akan dilanjutkan.
- (ii) Pensyarah sementara boleh ditamat perkhidmatannya atas kebarangkalian 0.1.
- (iii) Pensyarah sementara jika perkhidmatannya tidak ditamatkan,
- boleh dilanjutkan dengan taraf yang sama atas kebarangkalian 0.67;
 - boleh dinaikkan pangkat tetapi masih dengan taraf sementara atas kebarangkalian 0.22;
 - boleh diberikan taraf tetap, tetapi tidak dinaikkan pangkat atas kebarangkalian 0.01.
- (iv) Jika pensyarah telah dinaikkan pangkat,
- dia tidak dapat dinaikkan pangkat lagi;
 - boleh ditamatkan perkhidmatannya atas kebarangkalian 0.05;
 - boleh dilanjutkan atas taraf yang sama dengan kebarangkalian 0.5;
 - boleh diberikan taraf tetap dengan kebarangkalian 0.45.

.../5

- (a) Bentukkan matrix peralihan. Apakah jenis proses/rantai Markov yang didapati?
- (b) Apakah kebarangkalian pensyarah yang telah dinaikkan pangkat ditetapkan pada masa depan?
- (c) Apakah kebarangkalian pensyarah yang telah dinaikkan pangkat ditamatkan perkhidmatan pada masa depan?
- (d) Berapa tahun, puratanya, akan berlepas sebelum sama ada pensyarah yang dinaikkan pangkat itu ditetapkan atau ditamatkan perkhidmatan?
- (e) Apakah kebarangkalian pensyarah yang dilanjutkan dengan taraf sementara ditetapkan pada masa depan?
- (f) Apakah kebarangkalian pensyarah yang dilanjutkan dengan taraf sementara ditamatkan perkhidmatan pada masa depan?
- (g) Berapa tahun, puratanya, akan berlepas sebelum sama ada pensyarah yang dilanjutkan dengan taraf sementara itu ditetapkan atau ditamatkan perkhidmatan?

(100/100)

- ooo00ooo -