UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MAT420 - Persamaan Pembezaan Separa

Masa: [3 jam]

Jawab KESEMUA soalan.

1. (a) Terangkan dengan ringkas bagaimana penyelesaian persamaan

$$P(x, y, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q(x, y, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} = R(x, y, \psi)$$

boleh didapati.

Carikan penyelesaian

$$x(y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} + y(\psi - x) \frac{\partial \psi}{\partial y} = (x - y)\psi$$

yang mematuhi syarat $x = y = \psi = t$.

(b) Carikan peringkat terendah persamaan pembezaan separa yang dibina oleh penyelesaian

$$\psi(x, y) = (2x + a)^{\frac{1}{2}} + (2y + b)^{\frac{1}{2}}.$$

Di sini a, b adalah pemalar.

(100/100)

2. Kelaskan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ..... \quad (1)$$

dan carikan bentuk kanoniknya. Justru itu, carikan penyelesaian am Pr. (1). Jika syarat-syarat

.../2

$$u(x, 0) = f(x)$$

dan $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g(x)$

dikenakan ke atas Pr. (i), berikan penyelesaian yang timbul.

(100/100)

3. Jika $u(x, y)$ mematuhi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \ell$$

dan dikenakan syarat

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \frac{\alpha}{\ell}(y + \ell), & 0 < y < \ell, \\ u(x, 0) &= \alpha \quad , & 0 < x < \infty, \\ u(x, \ell) &= \alpha \quad , & 0 < x < \infty, \end{aligned}$$

serta

u dibatasi apabila $x \to \infty$,

melalui kaedah pemisahan pembolehubah, selesaikan masalah tak homogen ini. Di sini α, ℓ adalah pemalar.

(100/100)

4. Berikan takrif Transformasi Laplace untuk sebarang fungsi $f(t)$. Di sini $0 \leq t < \infty$.
Jika L menandakan Transformasi Laplace, tunjukkan bahawa

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}$$

dan

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sL\{f(t)\} - f(0).$$

Di sini f dan g adalah fungsi-fungsi yang bergantung kepada pembolehubah t, α dan β pemalar, sementara $s \in \mathbb{R}$ adalah dari e^{-st}, inti L.

Melalui L, tunjukkan bahawa penyelesaian

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

.../3

yang dikenakan syarat

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -k ,$$
$$u(x,0) = 0 ,$$

dan

$$u(x,t) \to 0 \text{ bila } x \to \infty$$

ialah

$$u(x,t) = k\left\{2\alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-x^2/(4\alpha^2 t)} - x \,\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right)\right\}.$$

Perhatian:

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\eta} e^{-t^2}\,dt$$

i.e. $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$.

(100/100)

5. Suatu pergerakan bendalir didapati mematuhi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Di sini, u ialah kelajuan bendalir, ν pemalar, t dan y masing-masing ialah pembolehubah-pembolehubah masa dan kordinat ruang. Juga, diketahui ia mematuhi syarat

$u(y,0) = 0$ untuk $y > 0$
$u(0,t) = U$ untuk $t > 0$, U pemalar,

dan $u(y,t) \to 0$ apabila $y \to \infty$

.../4

Melalui transformasi $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$ dan $u = Uf(\eta)$, dapatkan persamaan untuk f dan tunjukkan bahawa

$$u(y,t) = U - U\,\mathrm{erf}\left(y/(2\sqrt{\nu t})\right).$$

(Anda boleh menggunakan keputusan

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-t^2}dt$$

dan $$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad .)$$

(100/100)

- oooOOooo -