UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MAT 420 - Persamaan Pembezaan Separa

Masa : [3 jam]

Jawab semua soalan.

1. (a) Buktikan teorem berikut:

Teorem:

$\frac{d^n f}{dx^n}$ mempunyai Jelmaan Fourier $(-ip)^n F(p)$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ jika $\frac{d^m f}{dx^m} \longrightarrow 0$ apabila $x \longrightarrow \pm\infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots (n - 1)$.

(b) Persamaan Korteweg-deVries yang dilinearkan ditulis seperti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad -\infty < x < \infty.\ t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

dengan k pemalar.

(i) Selesaikan masalah di atas.

(ii) Gunakan teorem Konvolusi untuk memudahkan ungkapan.

(100/100)

.../2

2. (a) Fungsi gamma $\Gamma(x)$ ditakrifkan seperti

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt .$$

Tunjukkan bahawa $\mathcal{L}\{x^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$, $n > -1$. Mengapa keputusan ini tidak sah untuk $n \le -1$?

(b) Masalah getaran semi-tak terhingga boleh diangkapkan seperti berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = f(t)$$
$$u(x, 0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

dengan c pemalar. Tunjukkan bahawa penyelesaian boleh ditulis seperti:

$$u(x, t) = H(t - \tfrac{x}{c})\, f(t - \tfrac{x}{c})$$

di mana H adalah fungsi langkah unit Heaviside.

(100/100)

3. (a) Dapatkan bentuk kompleks bagi siri Fourier, iaitu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/\ell}$$

di mana $c_n = \dfrac{1}{2\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{in\pi x/\ell} dx$.

.../3

(b) Jika $f(x)$ nyata, tunjukkan bahawa $c_{-n} = \bar{c}_n$ di mana $\bar{c}_n$ ialah konjugat kompleks kepada c_n.

(c) Pertimbangkan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1/\partial & x_0 < x < x_0 + \partial \\ 0 & x > x_0 + \partial \end{cases}$$

Anggapkan bahawa $x_0 > -\pi$ dan $x_0 + \partial < \pi$. Dapatkan koefisien kompleks Fourier c_n.

(100/100)

4. Selesaikan persamaan-persamaan

(a) $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ diberi bahawa $z = e^{-5/y}$ apabila $x = 0$.

(b) $x^3\dfrac{\partial u}{\partial x} + y(3x^2 + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = (2x^2 + y)u$ tertakluk kepada syarat bahawa

$$u = y^2 + y \text{ apabila } x = 1 .$$

(100/100)

5. Pertimbangkan persamaan haba tak homogen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \qquad 0 \le x \le \ell, \quad t > 0$$

tertakluk kepada

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0$$

$$u(x, 0) = g(x)$$

.../4

(a) Selesaikan dengan menggunakan kaedah kembangan fungsi-eigen.

(b) Dapatkan fungsi Green bagi masalah ini.

(c) Jika $Q(x, t) = Q(x)$, ambil had apabila $t \to \infty$ dalam bahagian (b) untuk mendapatkan fungsi Green bagi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

dengan $u(0) = 0$

$$\frac{du}{dx}(\ell) = 0$$

(100/100)

- oooOooo -

LAMPIRAN

$f(x)$	$F(p) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$	$(2\pi)^{\frac{1}{2}} F(p).G(p)$
$f(x - \beta)$	$e^{ip\beta} F(p)$
$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$	e^{-ap^2}

$f(x)$	$\mathscr{L}(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx$
$\int_0^x f(x-u)g(u)du$	$\mathscr{L}\{f(x)\}.\mathscr{L}\{g(x)\}$
$H(x-b)f(x-b)$	$e^{-bp}\mathscr{L}\{f(x)\}, \quad b > 0$