UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

**MAT420 - Persamaan Pembezaan Separa**

[Masa : 3 jam]

---

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Selesaikan persamaan gelombang berikut:

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

dengan syarat sempadan

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0$$

serta syarat-syarat awal

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

di mana

$$f(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x \le \ell/4 \\ A\ell/4 & \ell/4 < x < 3\ell/4 \\ A(\ell-x) & 3\ell/4 \le x \le \ell. \end{cases}$$

*(100/100)*

2. Tunjukkan bahawa persamaan pembezaan separa:

$$e^{\alpha} \phi_{\alpha\alpha} + e^{\beta} \phi_{\beta\beta} = \phi$$

ialah eliptik pada semua titik atas satah. Dapatkan bentuk kanoniknya.

*(100/100)*

3. Diberi persamaan haba:

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t)$$

dengan syarat-syarat

$$u(x,0) = u_0$$
$$u(0,t) = u_1$$
$$\lim_{x \to \infty} u(x,t) = u_0$$

di mana $u_0$, $u_1$, adalah pemalar-pemalar.
Dengan menggunakan kaedah jelma Laplace, tunjukkan bahawa penyelesaiannya boleh ditulis seperti:

$$u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0)\operatorname{erfc}\left\{\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right\}$$

di mana

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t).$$

*(100/100)*

4. Fungsi $\phi$ memenuhi persamaan

$$\sqrt{x}\,\phi_x + \phi\,\phi_y = -\phi^2$$

dengan syarat $\phi = 1$ atas $y = 0$, $0 < x < \infty$.

Tunjukkan bahawa persamaan Cartesian melalui titik $R(x_1, 0)$, $x_1 > 0$ ialah

$$y = \log\,(2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x_1}\,).$$

Gunakan satu kaedah beza terhingga untuk menilaikan hampiran pertama kepada penyelesaian dan nilai y pada titik $P(1.1, y)$, $y > 0$, atas cirian melalui titik $R(1,0)$.

Nilaikan satu hampiran kedua kepada nilai-nilai ini dengan satu kaedah lelaran. Bandingkan keputusan-keputusan ini dengan apa yang diberi melalui rumus analitik untuk y dan $\phi$.

*(100/100)*

\- ooOoo -

**LAMPIRAN**

1. $\mathrm{erf}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\, dx$ .

2. $\mathscr{L}\left\{ \mathrm{erfc}\left[ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} \right] \right\} = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$ .

3. $\mathscr{L}\left\{ \dfrac{du}{dx} \right\} = p\mathscr{L} - u(0)$ .

4. $\mathscr{L}\left\{ \dfrac{d^2u}{dx^2} \right\} = p^2\mathscr{L} - pu(0) - u_x(0)$.