

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1989/90

Mac/April 1990

MAT420 - Persamaan Pembezaan Separa

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. Cari cirian bagi

$$2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 - x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dan lakarkan cirian ini. Tunjukkan bahawa penyelesaian u dapat ditentukan dalam rantau $x \geq 0$, $y \geq 0$ jika u diberi atas $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Cari penyelesaian jika

$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(100/100)

2. (a) Diberi satu persamaan parabolik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u + \delta$$

dengan koefisien-koefisien malar.

Untuk kes $\gamma = -\frac{\beta^2}{4}$ serta penggantian $u = \theta \exp(\frac{1}{2} \beta x)$,

tunjukkan bahawa persamaan parabolik boleh diturunkan ke bentuk kanonik (persamaan haba)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial t} + w$$

dengan

$$w = \delta \exp(-\beta x/2).$$

.../2

(b) Fungsi $\phi(x, y)$ memuas persamaan

$$x^3 \phi_{xx} + xy(x-y) \phi_{xy} - y^3 \phi_{yy} + F(x, y, \phi_x, \phi_y) = 0.$$

Tunjukkan bahawa persamaan ini adalah hiperbolik dan dapatkan persamaan-persamaan cirian.

(100/100)

3. Selesaikan dengan sepenuhnya masalah gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c > 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

atas selang $-\infty < x < \infty$, tertakluk kepada syarat-syarat

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin x \text{ untuk semua } x$$

$$u \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ apabila } x \rightarrow \pm \infty \text{ untuk semua } t.$$

(100/100)

4. (a) Diberi bahawa

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+c^2/x^2)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}, \quad c \geq 0.$$

Sahkan bahawa Jelmaan Laplace bagi

$$f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{y}}^\infty e^{-u^2} du$$

terhadap y , adalah

$$L(f(x, p)) = p^{-1} e^{-x\sqrt{p}}.$$

.../3

- (b) Dalam rantau $x \geq 0$, $t \geq 0$, fungsi $\psi(x, t)$ terbatas dan memuas persamaan

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

tertakluk kepada syarat-syarat $\psi(x, 0) = 0$ untuk $x > 0$, $\psi(0, t) = 1$. Dapatkan Jelmaan Laplace $L(\psi(x, p))$ dan dengan ini, cari $\psi(x, t)$.

(100/100)

5. Tunjukkan bahawa $w = xy$ adalah satu fungsi Riemaan-Green yang sesuai untuk persamaan

$$xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + v = 1$$

Dengan ini, selesaikan untuk v bagi kes $v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ atas datum $xy = 1$.

(100/100)

- ooo00ooo -