

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA  
Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang 1989/90  
Mac/April 1990

MAT413 - Aljabar Moden II

Masa: [ 3 jam ]

Jawab SEMUA soalan.

1. (A) Bagi setiap soalan berikut, pilih jawapan yang betul:

(i)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \tilde{0} \Rightarrow$  dimensi ruang penyelesaian ialah

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) yang lain

(ii)  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a + b - c = 0 \\ c + d = 0 \end{array}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

mempunyai dimensi

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4

(iii) Diberi  $U = \left\{ \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$  dan

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + y - z = 0, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ . Maka

$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = ?$

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4

.../2

(iv) Jika  $|A - \lambda I| = |B - \lambda I| = -\lambda^2(\lambda - 1)$ , maka didapati:

- (a)  $|A| \neq |B|$
- (b) A tak singular
- (c)  $|B| \neq 0$
- (d) A serupa dengan B
- (e) kesimpulan yang lain

(v) Diberi  $V = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} a-b & c-b \\ b & c \end{array} \right] \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ;

$$W = \left\{ \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right] \mid \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2y - w = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}; \quad A \text{ dan } B \text{ masing-masing}$$

asas tertib bagi V dan W;  $T : V \rightarrow W$  adalah suatu transformasi linear. Maka saiz  $[T]_{AB}$  ialah:

- (a)  $3 \times 2$ , (b)  $2 \times 3$ , (c)  $3 \times 1$ , (d)  $1 \times 3$ ,
- (e) yang lain

(vi) Fungsi berikut yang bukan transformasi linear ialah:

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 0 \end{bmatrix}$

(b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(c)  $T : \mathbb{C} \rightarrow M_{2 \times 2} \ni T(a + bi) = \begin{bmatrix} a-7b & a+b \\ a & b \end{bmatrix}$

.../3

(d)  $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{n \times m} \ni T(A) = A^T - I$

(e)  $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2} \ni T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & d-c \end{pmatrix}$

(vii) Vektor eigen yang tak bersandar linear bagi

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  ialah:

(a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ , (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , (d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

(e)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(viii) Diberi A adalah matriks  $3 \times 3$ . A serupa dengan suatu matriks pepenjuru jika persamaan ciri bagi A ialah:

(a)  $\lambda^3 = 0$ , (b)  $\lambda^2(\lambda-1) = 0$ , (c)  $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$ ,

(d)  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$ , (e)  $(\lambda-2)^3 = 0$ .

(ix)  $T : R^3 \rightarrow M_{2 \times 3} \ni T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x & 8y & 9z \\ x-2y & x+3y & x+y+z \end{pmatrix}$

Maka  $\dim(R_T) + \dim(N_T)$  ialah:

(a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) yang lain.

(x) Kalau  $A = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  dan

$B = \left\{ \omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \omega_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , takrifkan

$v_k^T i_j = \begin{cases} 0 & \text{jika } k \neq i \\ \omega_j & \text{jika } k = i \text{ bagi } i = 1, 2, 3 \end{cases}$   
 $j = 1, 2.$

.../4

Maka  $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} + T_{22} \end{bmatrix} = ?$

- (a)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ , (b)  $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ , (c)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ , (d)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  
(e) yang lain

(xi) Diberi  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x-y \end{bmatrix}$ . Maka

- (a) T adalah 1-1  
(b)  $\dim(R_T) = 2$   
(c) T adalah menyeluruh  
(d)  $\dim(R_T + N_T) = 2$   
(e)  $\dim(N_T) = 0$

(xii) Diberi  $T : V \rightarrow V$  adalah suatu transformasi, C dan D adalah asas tertib bagi V. Maka  $[T]_{CD}$  serupa dengan

- (a)  $[T]_{CC}$ , (b)  $[T]_{DC}$ , (c)  $[T^2]_{CD}$ , (d)  $[T^2]_{DC}$   
(e) yang lain

(xiii) Kalau  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  adalah suatu transformasi linear

dengan  $\dim(N_T) = 0$  dan  $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Maka  $[T]_A$

- (a) serupa dengan suatu matriks pepenjuru  
(b) adalah simetri  
(c) adalah singular  
(d) adalah ortogon  
(e)  $\lambda = 0$  bukan nilai eigen bagi  $[T]_A$

.../5

(xiv) Diberi  $[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  dan  $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Maka

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ?$$

(a)  $\begin{bmatrix} 0 \\ -x+y \end{bmatrix}$ , (b)  $\begin{bmatrix} 0 \\ -y+x \end{bmatrix}$ , (c)  $\begin{bmatrix} -x+y \\ 0 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} -y+x \\ 0 \end{bmatrix}$ , (e) yang lain

(xv) Set berikut adalah set ortonormal:

(a)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \right\}$

(e)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

(60/100)

(B) U dan W adalah subruang bagi V. Buktikan  $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$ .

(20/100)

(C) A dan B adalah matriks  $n \times n$ . Buktikan  $|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$ .

(20/100)

.../6

2. (a) Diberi  $T : V \longrightarrow W$  adalah suatu transformasi. Buktikan  $\dim(V) = \dim(R_T) + \dim(N_T)$ .

(40/100)

- (b) Diberi  $T : M_{2 \times 2} \longrightarrow M_{2 \times 2}$  yang mana  $T(A) = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

Tentukan bagian (a).

(20/100)

- (c)  $T : V \longrightarrow V$  adalah suatu transformasi sedemikian  $T \cdot T = T$ . Buktikan

(i)  $u \in R_T \Rightarrow T(u) = u$

(ii)  $T \neq I \Rightarrow N_T \neq \{\tilde{0}\}$

(iii)  $V = R_T + N_T, R_T \cap N_T = \{\tilde{0}\}$

(15/100)

- (d)  $V$  dan  $U$  adalah ruang vektor.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  adalah suatu asas bagi  $V$  dan  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset U$ . Buktikan wujud suatu transformasi linear unik  $T : V \longrightarrow U$  sedemikian  $T(v_1) = u_1, T(v_2) = u_2, \dots, T(v_n) = u_n$ .

(25/100)

3. (a)  $T : V \longrightarrow W$  adalah suatu transformasi linear;  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  dan  $B = \{w_1, \dots, w_m\}$  masing-masing adalah asas tertib bagi  $V$  dan  $W$ . Takrifkan  $[T]_{AB}$  dan buktikan  $[T]_{AB} [X]_A = [T(X)]_B$  bagi semua  $X \in V$ .

(20/100)

- (b)  $T : V \longrightarrow V$  adalah suatu transformasi linear;  $A$  dan  $B$  adalah asas tertib bagi  $V$ . Buktikan  $[T]_B = [I]_{BA}^{-1} [T]_A [I]_{BA}$ .

(20/100)

.../7

(c) Diberi  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sedemikian  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$  ;

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Cari  $[T]_A$  dan  $[T]_B$  dan juga  $P$  (tak singular) sedemikian

$$[T]_B = P^{-1}[T]_A P .$$

(30/100)

(d)  $T : V \rightarrow W$  adalah suatu transformasi linear dan  $\dim(R_T) = r$ .  
Buktikan wujud suatu asas  $A$  bagi  $V$  dan suatu asas  $B$  bagi  $W$

sedemikian  $[T]_{AB} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  yang mana  $I_{r \times r}$  adalah matriks identiti saiznya  $r \times r$ .

(30/100)

4. (a)  $u$  dan  $v$  adalah vektor dari  $\mathbb{R}^n$ . Buktikan  $|u \cdot v| \leq |u||v|$ .

(20/100)

(b)  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  adalah suatu asas bagi  $\mathbb{R}^3$ . Bentukkan suatu

asas ortonormal bagi  $\mathbb{R}^3$  dengan kaedah Gram-Schmidt.

(20/100)

(c) Katakan  $W$  adalah suatu subruang bagi  $\mathbb{R}^n$  dan  $W^\perp = \{ v \mid v \cdot w = 0 \forall w \in W \}$ . Buktikan

(i)  $W^\perp$  adalah suatu subruang bagi  $\mathbb{R}^n$

(ii)  $W^\perp \cap W = \{ \tilde{0} \}$

..../8

(iii)  $R^n = W + W^\perp$

(iv)  $(W^\perp)^\perp = W$

(30/100)

- (d) Katakan  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  adalah set ortogonal dari  $R^n$  dan  $\alpha_i \neq \tilde{0}$ .  
Jika  $\beta \in V$ , buktikan

$$\sum_{k=1}^m \frac{|\beta \cdot \alpha_k|^2}{|\alpha_k|^2} \leq |\beta|^2$$

Selanjutnya kesamaan ini benar jika dan hanya jika

$$\beta = \sum_{k=1}^m \frac{\beta \cdot \alpha_k}{|\alpha_k|^2} \alpha_k$$

(30/100)

- ooo00ooo -