UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MAT413 - Aljabar Moden II

Masa: [3 jam]

Jawab EMPAT soalan.

1. (a) Tentukan sama ada setiap set berikut tak bersandar secara linear:

(i) $\{(1, 2, 0), (3, 1, 2), (4, 1, 3)\}$

(ii) $S_2 = \{1+t^2, 1+2t+t^3, -1+t, -1+t^2+t^3\}$

(iii) $S_3 = \{3\underset{\sim}{v}_1+\underset{\sim}{v}_2-\underset{\sim}{v}_3, 2\underset{\sim}{v}_1-\underset{\sim}{v}_2+\underset{\sim}{v}_3+\underset{\sim}{v}_4, 5\underset{\sim}{v}_1-2\underset{\sim}{v}_2+\underset{\sim}{v}_3+2\underset{\sim}{v}_4\}$ jika $\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \underset{\sim}{v}_3, \underset{\sim}{v}_4\}$ tak bersandar secara linear

(30/100)

(b) Katakan S suatu subruang dari $P_4(t)$, set polinomial darjah ≤ 4, yang dijanakan oleh $B = \{1+2t+t^2+t^4, -2t+t^2+t^4, 1-t+t^3+t^4, 1+4t\}$.

(i) Cari suatu asas bagi S supaya ia adalah subset B.

(ii) Cari dimensi S.

(iii) Tentukan sama ada $1-t^2+t^3-2t^4$ ahli S.

(30/100)

.../2

(c) Katakan U, V dua subruang dari suatu ruang vektor. Andaikan $W = U+V = \{\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{v} : \underset{\sim}{u} \in U, \underset{\sim}{v} \in V\}$. Takrifkan $T_1 : W \to W$ dan $T_2 : W \to W$ oleh

$$T_1(\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{u} \quad \text{dan} \quad T_2(\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{v}$$

untuk $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$.

(i) Tunjukkan $T_1 \in \text{Hom}(W)$ dan $I_{T_1} = U$.

(ii) Tunjukkan $T_1 \circ T_1 = T_1$ dan $T_1 \circ T_2(\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{0}$ untuk setiap $\underset{\sim}{w} \in W$.

(iii) Tunjukkan $T_1 + T_2 = I$ (transformasi linear identiti).

(40/100)

2. (a) Katakan suatu pemetaan $T : P_3(t) \to \mathbb{R}^3$ ditakrifkan oleh

$$T(a+bt+ct^2+dt^3) = (a+b-d,\ a+c+2d,\ a+b+c+d) .$$

(i) Tunjukkan T adalah suatu transformasi linear.

(ii) Dapatkan I_T dan N_T.

(iii) Cari pangkat T dan kenolan T.

(30/100)

(b) Katakan $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dengan asas-asas tertib $B = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ bagi $\mathbb{R}^3$ dan $B^* = \{(1, 2), (1, 1)\}$ bagi $\mathbb{R}^2$.

Jika $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matriks untuk T berkait kepada B dan B^*,

(i) dapatkan $T(x, y, z)$.

(ii) cari (a, b, c) supaya $T(a, b, c) = (4, 2)$.

(25/100)

.../3

(c) Andaikan $B = \{2t^2+t,\ t^2+3,\ t\}$ dan $B' = \{t^2+1,\ t-2,\ t+3\}$ dua asas tertib bagi $P_2(t)$, set polinomial darjah 2 atau kurang.

Katakan $\underset{\sim}{u}_1 = 8t^2 - 4t + 6$, $\underset{\sim}{u}_2 = 7t^2 - t + 9$.

(i) Cari $[\underset{\sim}{u}_1]_B$, $[\underset{\sim}{u}_2]_B$.

(ii) Dapatkan matriks peralihan dari B ke B'.

(iii) Dapatkan $[\underset{\sim}{u}_1]_{B'}$ dan $[\underset{\sim}{u}_2]_{B'}$.

(25/100)

(d) Katakan $T : V \to W$ adalah suatu isomorfisma. Buktikan $\{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \ldots, \underset{\sim}{u}_r\} \subset V$ adalah tak bersandar secara linear jika dan hanya jika

$$\{T(\underset{\sim}{u}_1), T(\underset{\sim}{u}_2), \ldots, T(\underset{\sim}{u}_r)\}$$

tak bersandar secara linear.

(20/100)

3. (a) Katakan $\{\underset{\sim}{v}_1 = (1, 1, 1), \underset{\sim}{v}_2 = (0, 1, 1), \underset{\sim}{v}_3 = (0, 0, 1)\}$ suatu asas bagi $\mathbb{R}^3$. Bentukkan suatu asas ortonormal $\{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3\}$ bagi $\mathbb{R}^3$ supaya $\underset{\sim}{u}_1$ selari dengan $\underset{\sim}{v}_1$. $<,>$ ditakrifkan oleh $<\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}> = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}$ untuk $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^3$.

(30/100)

(b) Katakan W suatu subruang $\mathbb{R}^n$ dan $W^* = \{\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n, <\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w}> = 0$ untuk setiap $\underset{\sim}{w} \in W\}$.

(i) Buktikan W^* suatu subruang $\mathbb{R}^n$.

(ii) Cari $\dim(W + W^*)$.

(iii) Tentusahkan bahawa $W + W^* = \mathbb{R}^n$.

(35/100)

.../4

(c) Katakan $B = \{\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_n\}$ suatu asas tertib bagi V. Suatu pemetaan $T : V \to V$ ditakrifkan oleh

$$T(\underset{\sim}{v}) = \lambda_1 \underset{\sim}{v}_2 + \lambda_2 \underset{\sim}{v}_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \underset{\sim}{v}_n ;$$

$$[\underset{\sim}{v}]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) .$$

(i) Tunjukkan T adalah suatu transformasi linear.

(ii) Cari $T(\underset{\sim}{v}_i)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Cari A_T berkait kepada asas B.

(iv) Tunjukkan $T^n(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{0} \ \forall \ \underset{\sim}{v} \in V$.

(35/100)

4. (a) Katakan $T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dan $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ialah matriks untuk transformasi linear T berkait kepada asas piawai. Jika $B' = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ adalah suatu asas tertib bagi $\mathbb{R}^3$, cari A'_T, matriks transformasi linear T berkait kepada asas tertib B'.

(30/100)

(b) Katakan $P = [p_{ij}]_{nxn}$ adalah suatu matriks tak singular. Andaikan $S_1 = \{\underset{\sim}{u}_1, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$, dan $S_2 = \{\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_n\}$ dengan

$$\underset{\sim}{v}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} \underset{\sim}{u}_k \text{ untuk } i = 1, \ldots, n.$$ Buktikan:

S_2 tak bersandar secara linear jika dan hanya jika S_1 tak bersandar secara linear.

(30/100)

(c) Katakan $T \in Hom(V, W)$. Buktikan

(i) $N_T = \{\underset{\sim}{0}\}$ jika dan hanya jika T adalah satu-ke-satu.

(ii) $\dim I_T + \dim N_T = \dim V$.

(40/100)

5. (a) Katakan $B = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \ldots, \underset{\sim}{u}_i, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$ suatu asas tertib bagi V. Jika $\underset{\sim}{v} = r_1\underset{\sim}{u}_1 + r_2\underset{\sim}{u}_2 + \ldots + r_n\underset{\sim}{u}_n$, $r_1 \neq 0$, maka tunjukkan $B' = \{\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3, \ldots, \underset{\sim}{u}_i, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$ suatu asas V. Andaikan $[\underset{\sim}{u}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dapatkan $[\underset{\sim}{u}]_{B'}$.

(25/100)

(b) Jika $S = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$ dengan $\underset{\sim}{u}_i \neq \underset{\sim}{0}$ $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah suatu set ortogon, maka buktikan S tak bersandar secara linear.

(20/100)

(c) Katakan V suatu ruang hasildarab terkedalam yang berdimensi finit, dan $B = \{\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$ asas ortonormal untuk V. Andaikan $T \in \mathrm{Hom}(V)$ dan $A = [a_{ij}]$ matriks transformasi linear T berkait kepada asas tertib B, buktikan

$$a_{ij} = \langle T(\underset{\sim}{u}_j), \underset{\sim}{u}_i\rangle \;.$$

(30/100)

(d) Katakan V dan W adalah ruang hasildarab terkedalam dan andaikan $B = \{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_n\}$ asas ortonormal bagi V.
Buktikan $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ adalah transformasi ortogonal jika $\{T(\underset{\sim}{v}_1), T(\underset{\sim}{v}_2), \ldots, T(\underset{\sim}{v}_n)\}$ adalah suatu set ortonormal pada W.

[<u>Perhatian</u>: $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ adalah suatu transformasi ortogonal jika $\langle T(\underset{\sim}{u}), T(\underset{\sim}{v})\rangle = \langle \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}\rangle$ $\forall$ $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in V$.]

(25/100)

- oooOOooo -