UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MAT361 - Pentaabiran Statistik

[Masa : 3 jam]

Jawab SEMUA soalan. Mulakan setiap soalan pada halaman yang baru.

1. (a) Andaikan X_1, X_2 menandai suatu sampel rawak saiz dua daripada taburan $N(0, 1)$. Gunakan keputusan-keputusan bagi taburan pensampelan untuk mencari taburan setiap statistik berikut:

(i) $\frac{1}{2}(X_2 - X_1)$.

(ii) $\frac{1}{2}[(X_1 + X_2)^2 + (X_2 - X_1)^2]$.

(iii) $\dfrac{(X_1 + X_2)^2}{(X_2 - X_1)^2}$.

(iv) $\dfrac{(X_1 + X_2)}{\sqrt{(X_1 + X_2)^2 + (X_2 - X_1)^2}}$.

(40/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, ..., X_n$ menandai suatu sampel rawak daripada taburan $\chi^2_{(1)}$. Takrifkan

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

(i) Nyatakan taburan penghad pembolehubah rawak $\frac{Y_n}{n}$.

. . ./2

ii) Apakah taburan penghad pembolehubah rawak

$$Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}} ?$$

(iii) Tunjukkan bahawa pembolehubah rawak

$$W_n = \sqrt{2Y_n} - \sqrt{2n - 1}.$$

mempunyai taburan penghad yang sama seperti taburan penghad Z_n.

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pembolehubah rawak tak bersandar setiap satu mempunyai taburan $N(0, 1)$. Takrifkan pembolehubah rawak T sebagai

$$T = \sqrt{X_1^{\;2} + X_1^{\;2} + \ldots + X_n^{\;2}}.$$

Cari fungsi ketumpatan $h(t)$ bagi T.

(20/100)

2. (a) Biarkan $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3$ menandai statistik tertib bagi suatu sampel rawak saiz tiga daripada taburan seragam pada selang $(0, \theta)$. Tunjukkan bahawa $S = \frac{Y_1}{Y_2}$, $T = \frac{Y_2}{Y_3}$ dan $U = Y_3$ tak bersandar secara stokastik.

(40/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandai sampel rawak saiz n daripada taburan eksponen yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathrm{I}_{(0, \infty)}(x); \quad \theta > 0.$$

(i) Cari taburan statistik tertib pertama

$$Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

(ii) Terbitkan suatu penganggar saksama bagi θ sebagai fungsi Y_1.

(iii) Cari satu lagi penganggar saksama bagi θ.

(iv) Antara kedua-dua penganggar yang mana satu diutamakan? Berikan justifikasi untuk jawapan anda.

(60/100)

3. (a) Suatu sampel rawak saiz n diambil daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x; \theta) = (\theta + 1)\, x^{\theta}\, I_{(0,\,1)}(x).$$

(i) Cari penganggar kaedah momen bagi θ.

(ii) Tunjukkan bahawa min geometri $(X_1 X_2 \ldots X_n)^{1/n}$ ialah fungsi statistik cukup dan lengkap.

(iii) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ dan tunjukkan bahawa ianya fungsi bagi min geometri.

(40/100)

(b) Andaikan $\hat{\theta}$ ialah penganggar kebolehjadian maksimum bagi parameter θ berdasarkan sampel rawak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ daripada taburan dengan fungsi ketumpatan $f(x; \theta)$. Maka bagi n cukup besar, statistik $\hat{\theta}$ mempunyai taburan yang hampir normal dengan min θ dan varian $1/B$, $B = nE\left[(\partial \log f(X; \theta)/\partial\theta)^2\right]$, iaitu

$$\hat{\theta} \,\dot{\sim}\, N\left(\theta, \frac{1}{B}\right), \quad \text{bagi } n \text{ cukup besar.}$$

(i) Berdasarkan sampel rawak saiz n daripada taburan $N(0, \theta)$, $\theta > 0$, cari penganggar kebolehjadian maksimum $\hat{\theta}$ bagi θ.

(ii) Berikan taburan asimptot bagi $\hat{\theta}$.

(iii) Cari taburan sebenar bagi $\hat{\theta}$.

(iii) Adakah $\hat{\theta}$ penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (UMVUE) bagi θ?

(v) Adakah $\hat{\theta}$ penganggar cekap?

(60/100)

. . ./4

4. (a) Suatu sampel rawak saiz 25 diambil daripada taburan seragam pada selang $(0, 2\theta)$, $\theta > 0$.

(i) Jika $Y_n = \text{maks}(X_1, X_2, ..., X_{25})$, tunjukkan bahawa $\dfrac{Y_n}{2\theta}$ ialah suatu kuantiti pangsi.

(ii) Cari nilai c supaya $\left(\dfrac{Y_n}{2}, \dfrac{Y_n}{2c}\right)$ ialah selang keyakinan 95% bagi θ.

(iii) Cari jangkaan panjang selang keyakinan di dalam (ii).

(iv) Terbitan satu selang keyakinan *hampiran* 95% bagi θ dengan menggunakan keputusan teorem had memusat.

(v) Cari jangkaan panjang selang keyakinan di dalam (iv).

(60/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, ..., X_n$ menandai sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ menandai sampel rawak saiz m daripada taburan $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Anggapkan kedua-dua sampel tak bersandar dan semua parameter tidak diketahui.

(i) Terbitkan penganggar selang bagi μ_1.

(ii) Terbitkan penganggar selang bagi σ_1^2/σ_2^2.

(40/100)

5. (a) Suatu cerapan tunggal bagi X diperolehi bagi tujuan menguji hipotesis ringkas

$$H_0 : X \sim N(0, 1), \text{ iaitu } f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, I_{(-\infty, \infty)}(x).$$

lawan hipotesis ringkas

$$H_1 : X \sim \text{Cauchy}, \text{ iaitu } f_1(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, I_{(-\infty, \infty)}(x).$$

. . ./5

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz α untuk menguji hipotesis-hipotesis di atas.

(ii) Cari kuasa bagi ujian di dalam (i).

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, ..., X_n$ menandai sampel rawak saiz n dariapda taburan $N(0, \theta)$.

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ lawan } H_1 : \theta = \theta_1, \ (\theta_1 > \theta_0).$$

(ii) Adakah ujian di atas ujian paling berkuasa secara seragam bagi

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ lawan } H_1 : \theta > \theta_0 ?$$

(iii) Tunjukkan bahawa ujian nisbah kebolehjadian teritlak bagi

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ lawan } H_1 : \theta > \theta_0$$

diberikan oleh statistik khi kuasa-dua.

(50/100)

-ooOoo-

Nama Taburan	Fungsi Ketumpatan f	Min $\mu = E[X]$	Varians $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$	Fungsi penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N}\, \mathrm{I}_{\{1, 2, \ldots, N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x}\, \mathrm{I}_{\{0, 1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\, \mathrm{I}_{\{0, 1, \ldots, n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = p\, q^x\, \mathrm{I}_{\{0, 1, \ldots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1 - qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\, \mathrm{I}_{\{0, 1, \ldots\}}(x)$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a}\, \mathrm{I}_{[a, b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]\, \mathrm{I}_{(-\infty, \infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{I}_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}\, \mathrm{I}_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n,\ t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1}\, \mathrm{I}_{(0, \infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2},\ t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}\, \mathrm{I}_{(0, 1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	—