UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

MAT361 - Pentaabiran Statistik

[Masa: 3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan. Mulakan setiap soalan pada halaman yang baru.

$\bar{X} \sim N(0, \tfrac{1}{2})$

1. (a) Andaikan X_1, X_2 menandakan sampel rawak saiz 2 daripada taburan N(0, 1) dan Y_1, Y_2 menandakan sampel rawak saiz 2 daripada taburan N(1, 1). Anggapkan kedua-dua sampel tak bersandar. Gunakan keputusan-keputusan taburan pensampelan untuk mendapatkan taburan setiap statistik berikut:

$\bar{Y} \sim N(1, \tfrac{1}{2})$

$\bar{X} + \bar{Y} \sim N(\; , \;)$

(i) $\bar{X} + \bar{Y}$

(ii) $\frac{1}{2}[(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2]$

(iii) $(Y_1 + Y_2 - 2)^2/(Y_2 - Y_1)^2$

(iv) $(X_1 + X_2) \,/\, \sqrt{[(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2]/2}$.

(40/100)

(b) Biarkan X_1 , X_2 , ..., X_n sebagai suatu sampel rawak daripada taburan Gamma (n, λ). Cari taburan bagi

(i) $\sum_{i=1}^{n} X_i$

(ii) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(30/100)

(c) Andaikan X_1, X_2,... merupakan suatu jujukan pembolehubah rawak yang tak bersandar, setiap satunya tertabur secara seragam pada selang $(0, \theta)$. Biarkan $Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dan pertimbangkan jujukan pembolehubah rawak $W_n = nY_1$. Cari taburan penghad bagi W_n sekiranya wujud.

(30/100)

2. (a) Andaikan X_1, X_2, ..., X_n suatu sampel rawak daripada taburan seragam pada selang $[0, \theta]$ dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta}\, I_{[0,\theta]}(x)$$

dan biarkan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menandakan statistik tertib yang sepadan. Jika $n = 2k-1$, $k = 0, 1, \ldots$ maka Y_k ialah median sampel. Tunjukkan bahawa

(i) jangkaan bagi Y_k bersamaan dengan jangkaan bagi X.

(ii) jangkaan luas di bawah f(x) di sebelah kiri Y_k adalah bersamaan dengan 1/2.

(30/100)

(b) Andaikan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menandakan set statistik tertib yang sepadan bagi suatu sampel rawak saiz n daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \theta x^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x)\ .$$

Tunjukkan bahawa Y_1/Y_n dan Y_n adalah tak bersandar secara stokastik.

(30/100)

(c) Berdasarkan suatu sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$, S^2 varians sampel

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

boleh digunakan sebagai penganggar titik bagi σ^2.

Adalah juga diketahui bahawa nS^2/σ^2 tertabur secara khi kuasa dua dengan (n-1) darjah kebebasan.

(i) Tunjukkan bahawa S^2 ialah penganggar pincang tetapi konsisten bagi σ^2.

(ii) Nyatakan suatu fungsi bagi S^2 yang merupakan penganggar saksama bagi σ^2.

(iii) Cari taburan tepat bagi

$$\sqrt{n-1}\,(\bar{X} - \mu)/S$$

dan taburan penghad bagi

$$\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)/S$$

dengan merujuk kepada teorem-teorem berkaitan.

(40/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan binomial dengan kedua-dua parameternya, n dan p, tidak diketahui. Cari penganggar kaedah momen bagi n dan p.

(20/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan Bernoulli dengan parameter θ, $0 \le \theta \le 1$.

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$$

ialah penganggar saksama bagi $\theta(1 - \theta)$.

(iii) Cari batas bawah Rao-Cramér bagi varians penganggar-penganggar saksama bagi $\theta(1 - \theta)$.

(40/100)

(c) Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan eksponen dengan f.k.k. $f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\ I_{(0,\infty)}(x)$. Cari penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi

(i) θ.

(ii) $1/\theta$

(iii) median taburan.

[Nyatakan median dalam sebutan θ]

(40/100)

4. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan sampel rawak saiz n daripada taburan seragam pada selang $(\theta,\ \theta+1)$. Jika Y_1 ialah $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, tunjukkan bahawa $Y_1 - \theta$ ialah suatu kuantiti pangsi dan kemudian cari pekali keyakinan bagi selang keyakinan $(Y_1-b,\ Y_1)$ dalam sebutan b yang merupaka suatu pemalar positif.

(30/100)

(b) Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan $N(\theta,\ \theta^2)$,

(i) cari penganggar selang bagi θ dan bagi θ^2.

(ii) cari jangkaan panjang selang-selang rawak di atas.

(35/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan Gamma $(2,\ \theta)$. Berdasarkan min sampel, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$, terbitkan

(i) selang keyakinan hampiran bagi θ apabila n besar.

(ii) selang keyakinan bagi θ apabila n kecil. (Anda mungkin mahu menggunakan keputusan daripada soalan 1(b).

(35/100)

5. (a) Andaikan X suatu cerapan **tunggal** daripada taburan dengan f.k.k. $f(x;\ \theta) = (1 + \theta)x^{\theta}\ I_{(0,1)}(x)$, dengan $\theta > -1$.

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz α untuk menguji $H_0 : \theta = 0$ lawan $H_1 : \theta = 1$.

(ii) Untuk menguji $H_0 : \theta \le 0$ lawan $H_1 : \theta > 0$, ujian berikut digunakan: Tolak H_0 jika $X \ge 3/4$. Cari fungsi kuasa dan saiz bagi ujian tersebut.

(40/100)

(b) Berdasarkan sampel rawak saiz 10 daripada taburan $N(0,\ \sigma^2)$, cari ujian paling berkuasa secara seragam (UPBS) bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \sigma^2 = 1$ lawan $H_1 : \sigma^2 > 1$.

(20/100)

(c) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak saiz n daripada taburan dengan f.k.k. $f(x;\ \theta) = \theta^2\ xe^{-\theta x}\ I_{(0,\infty)}(x)$.

(i) Cari rantau genting paling berkuasa secara seragam untuk menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$.

(ii) Untuk menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta \neq 1$, ujian berikut digunakan: Tolak H_0 jika $|\bar{X} - 2| \ge K$. Cari K supaya $\alpha = 0.05$. [Anggap bahawa n cukup besar supaya Teorem Had Memusat boleh digunakan untuk mencari nilai hampiran bagi K].

(40/100)

-oo0oo -

Nama Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian (f.k.k.)	Min $\mu = E[x]$	Varians $\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$	Fungsi Penjana Momen $E[e^{tx}]$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	q/p	q/p^2	$\dfrac{p}{1 - qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Seragam	$f(x) = \dfrac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	μ	σ^2	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$, $t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\dfrac{n}{\lambda}$	$\dfrac{n}{\lambda^2}$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = (\frac{1}{2})^{r/2} e^{-x/2} \dfrac{x^{r/2-1}}{\left(\frac{r}{2} - 1\right)!} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\dfrac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$, $t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	-