UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1989/90

Mac/April 1990

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan. Mulakan setiap soalan pada mukasurat yang baru.

1. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan N(0, 1). Takrifkan

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{1}^{k} X_i \qquad \text{dan} \qquad \bar{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{k+1}^{n} X_i .$$

Gunakan keputusan-keputusan mengenai taburan pensampelan untuk mendapatkan taburan bagi setiap statistik berikut:

(i) $\frac{1}{2}(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})$

(ii) $k\bar{X}_k^2 + (n-k)\,\bar{X}_{n-k}^2$

(iii) X_1^2 / X_2^2

(iv) X_1 / X_n

(30/100)

(b) Pertimbangkan suatu sampel rawak saiz n daripada satu taburan jenis selanjar dengan f.k.k. f(x). Apakah nilai jangkaan bagi luas di bawah f(x) di sebelah kiri cerapan terkecil sampel tersebut?

(30/100)

.../2

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$ dan takrifkan S^2 sebagai

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (X_i - \bar{X})^2$$

Adalah diketahui bahawa $(n-1)S^2/\sigma^2$ tertabur secara khi kuasa dua dengan $(n-1)$ darjah kebebasan.

(i) Cari f.k.k. bagi S^2.

(ii) Tunjukkan bahawa S^2 menumpu secara stochastik kepada σ^2.

(40/100)

2. (a) Andaikan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menandakan set statistik tertib bagi suatu sampel rawak saiz n daripada taburan eksponen dengan f.k.k.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 .$$

(i) Tunjukkan bahawa Y_1 dan $Y_n - Y_1$ adalah tak bersandar secara stokastik.

(ii) Dapatkan taburan penghad bagi $Z_n = n \exp(-\theta Y_n)$.

(iii) Tunjukkan bahawa $e^{-\theta Y_n} / \theta Y_1$ mempunyai taburan penghad yang semua dengan Z_n.

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan seragam dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x)$$

dan biarkan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menandakan statistik tertib yang sepadan.

(i) Jika $n = 2k-1$, Y_k adalah median sampel. Tunjukkan bahawa $E[Y_k] = E[X]$.

.../3

(ii) Dapatkan satu penganggar saksama θ sebagai fungsi median sampel.

(iii) Dapatkan satu lagi penganggar saksama θ sebagai fungsi statistik cukup.

(iv) Di antara kedua-dua penganggar saksama, yang manakah anda akan gunakan bagi menganggar θ? Pertahankan jawapan anda dengan merujuk kepada sebarang teorem yang berhubungan.

(50/100)

3. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(x - \theta_1)/\theta_2} I_{[\theta_1, \infty)}(x) ,$$

$$-\infty < \theta_1 < \infty,\quad 0 < \theta_2 < \infty .$$

Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ_1 dan θ_2.

(20/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \theta\, x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) ,\quad \theta > 0 .$$

(i) Dapatkan penganggar kaedah momen bagi $\theta/(1+\theta)$.

(ii) Cari statistik cukup dan lengkap.

(iii) Gunakan Teorem Lehmaan-Scheffé untuk mendapatkan penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi satu fungsi θ, iaitu $\tau(\theta)$.

(iv) Tunjukkan bahawa varians PSVMS di atas mencapai batas bawah Rao-Cramér (B.B.R.C.) bagi varians penganggar-penganggar saksama $\tau(\theta)$.

(50/100)

.../4

(c) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel rawak daripada taburan $N(\theta,\theta)$, $\theta > 0$.

(i) Cari statistik cukup dan lengkap, sekiranya wujud.

(ii) Cari PSVMS bagi satu fungsi θ, jika wujud.

(iii) Beri alasan mengapa $\bar{X}$ bukan PSVMS bagi θ.

(30/100)

4. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai sampel rawak saiz n daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 .$$

Jika n besar, dapatkan selang keyakinan 90% bagi θ.

(20/100)

(b) Andaikan X suatu cerapan tunggal daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0 .$$

Cari satu kuantiti pangsi, dan gunakannya untuk mendapatkan satu penganggar selang-keyakinan bagi θ.

(30/100)

(c) Biarkan X_1, X_2 menandakan sampel rawak saiz 2 daripada taburan $N(\theta, 1)$. Biarkan $Y_1 < Y_2$ menandakan statistik tertib yang sepadan. Tentukan nilai γ jika

$$P(Y_1 < \theta < Y_2) = \gamma.$$

(25/100)

.../5

(d) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada $N(\mu, \sigma^2)$. Biarkan $0 < a < b$. Cari jangkaan matematik bagi panjang selang rawak

$$\left[\sum_{1}^{n} (X_i - \mu)^2/b \ , \ \sum_{1}^{n} (X_i - \mu)^2/a \right] .$$

(25/100)

5. (a) Andaikan X suatu cerapan tunggal daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = (2\theta x + 1 - \theta)\ I_{(0,1)}(x), \quad -1 \le \theta \le 1 .$$

Dapatkan satu ujian paling berkuasa bersaiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{lawan} \quad H_1 : \theta = 1$$

Nyatakan ujian anda dalam sebutan α.

(20/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan sampel rawak daripada taburan Poisson dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x) .$$

(i) Cari ujian paling berkuasa secara seragam bagi menguji

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{lawan} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

bagi $\theta_0 = 1$ dan $n = 25$. Pilih $\alpha = 0.05$ dan gunakan teorem had memusat.

.../6

(ii) Satu ujian yang munasabah bagi menguji $H_0 : \theta = \theta_0$ lawan $H_1 : \theta \neq \theta_0$ adalah seperti berikut:

Tolak H_0 jika $|\bar{X} - \theta_0| \geq K$.

Bagi $\alpha = 0.05$, cari nilai K.

[Anggap bahawa n cukup besar supaya teoram had memusat boleh digunakan untuk menganggar K.]

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan seragam pada selang $[\theta, \theta+1]$. Bagi menguji $H_0 : \theta = 0$ lawan $H_1 : \theta > 0$, ujian berikut digunakan:

Tolak H_0 jika dan hanya jika $Y_n \geq 1$ atau $Y_1 \geq k$, k suatu pemalar.

(i) Tentukan nilai k supaya ujian di atas mempunyai saiz α.

(ii) Cari fungsi kuasa bagi ujian di atas.

(40/100)

- oooOOooo -