UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Andaikan X_1 dan X_2 merupakan dua pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan $N(\mu, \sigma^2)$, dengan f.k.k.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0 .$$

(i) Andaikan $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$. Dapatkan f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2.

(ii) Dapatkan taburan sut bagi Y_1 dan bagi Y_2 dan tunjukkan bahawa Y_1 dan Y_2 adalah tak bersandar.

(50/100)

(b) Andaikan $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ merupakan statistik tertib bagi satu sampel dengan $n = 4$, daripada taburan seragam di dalam selang $(0, \theta)$, iaitu

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta$$
$$= 0, \quad \text{di tempat lain} .$$

(i) Dapatkan f.k.k. bagi Y_4.

(ii) Andaikan $0 < C_1 < C_2 \leq 1$ dipilih supaya $P(C_1\theta < Y_4 < C_2\theta) = 0.95$. Tunjukkan bahawa $C_1 = \sqrt[4]{0.05}$ dan $C_2 = 1$ memenuhi syarat-syarat tersebut.

.../2

(iii) Berdasarkan maklumat di bahagian (ii), apakah selang keyakinan 95% bagi θ?

(50/100)

2. (a) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \theta \leqslant x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty .$$

(i) Dapatkan satu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(ii) Dapatkan satu penganggar kaedah momen bagi θ.

(iii) Tunjukkan bahawa $Y_1 = \text{minimum}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ merupakan suatu statistik cukup dan lengkap bagi θ dan seterusnya, dapatkan satu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi θ.

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai satu sampel rawak daripada taburan Poisson dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Tunjukkan bahawa penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ merupakan satu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi θ.

(50/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_9$ merupakan sampel rawak saiz 9 daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$.

(i) Jika σ diketahui, dapatkan satu kuantiti pangsi yang boleh digunakan untuk mencari selang keyakinan bagi μ. Dapatkan suatu selang keyakinan 95% bagi μ.

(ii) Jika σ tidak diketahui, dapatkan kuantiti pangsi yang boleh digunakan untuk mencari selang keyakinan bagi μ, dan seterusnya, dapatkan selang keyakinan 95% bagi μ.

(30/100)

.../3

(b) Andaikan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ merupakan statistik tertib bagi sampel rawak, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, daripada taburan seragam di dalam selang $(0, \theta)$. Oleh itu, Y_n mempunyai f.k.k.

$$f(y_n; \theta) = \frac{n}{\theta^n} y_n^{n-1} , \quad 0 < y_n < \theta .$$

(i) Tunjukkan bahawa $T = Y_n$ merupakan satu penganggar konsisten bagi θ.

(ii) Dapatkan satu penganggar saksama bagi θ berdasarkan statistik T ini.

(iii) Dapatkan satu penganggar saksama bagi θ berdasarkan statistik $\bar{X}$.

(iv) Bandingkan varians kedua-dua penganggar saksama di bahagian (ii) dan (iii). Apakah kesimpulan yang boleh dibuat?

(70/100)

4\. (a) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ merupakan satu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} , \quad 0 < x < \infty, \quad \theta > 0 .$$

(i) Dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum (pkm) bagi $1/\theta$.

(ii) Dapatkan satu statistik cukup dan lengkap.

(iii) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi penganggar saksama bagi $1/\theta$.

(iv) Tunjukkan bahawa p.k.m. bagi $1/\theta$ merupakan satu penganggar yang cekap.

[Petunjuk: Gunakan transformasi $Y = \ln(1+X)$ dan dapatkan taburan bagi Y.]

(60/100)

.../4

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel rawak daripada taburan $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ merupakan sampel rawak daripada taburan $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. X_i dan Y_i adalah tak bersandar. Bincangkan cara untuk mendapatkan satu selang keyakinan bagi $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ apabila kedua-dua μ_1 dan μ_2 tidak diketahui.

(40/100)

5. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ merupakan sampel rawak daripada taburan Poisson dengan parameter θ. Andaikan kita ingin menguji hipotesis $H_o : \theta = \frac{1}{5}$ melawan $H_a : \theta = \frac{1}{2}$.

(i) Dengan menggunakan teorem Neyman Pearson, dapatkan satu rantau genting terbaik bagi ujian tersebut.

(ii) Hitungkan kebarangkalian melakukan ralat jenis I dan ralat jenis II bagi rantau genting

$$C = \{(x_1, \ldots, x_{10}) : x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \geq 4\}.$$

$$\left[\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Poisson}(10\theta)\right]$$

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel rawak daripada taburan normal $N(\mu = 3, \sigma^2 = \theta)$. Hipotesis yang ingin diuji ialah $H_o : \theta = 10$ melawan $H_a : \theta \neq 10$.

(i) Dapatkan satu ujian nisbah kebolehjadian.

(ii) Ungkapkan ujian nisbah kebolehjadian tersebut di dalam sebutan statistik yang diketahui taburannya.

$$\left[\text{Andaikan } Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i-3)^2, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i-3)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}\right]$$

.../5

(iii) Tentukan satu rantau genting bagi $n = 20$ dan $\alpha = .05$.

(iv) Adakah terdapat satu ujian paling berkuasa secara seragam bagi masalah ini? Terangkan.

(50/100)

- oooOOooo -