UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang Akademik 1990/91

Jun 1991

MAT 361 - PENTAABIRAN STATISTIK

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan. Mulakan setiap soalan pada halaman yang baru.

1. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan khi kuasa dua dengan 1 darjah kebebasan.

   (i) Cari taburan penghad bagi

   $$Z_n = \frac{\Sigma X_i - n}{\sqrt{2n}} \qquad \text{dan cari} \qquad \underset{n\to\infty}{\text{had}}\, P(Z_n \le z).$$

   (ii) Cari taburan bagi $\bar{X} = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$

   (iii) Jika $U = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dan $V = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$

   cari taburan bagi $U + V$ dan taburan bagi $(n-k)U/kV$ dengan menggunakan keputusan-keputusan taburan pensampelan.

   (50/100)

   (b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$ dan $\bar{X}$ dan S^2 masing-masingnya menandakan min sampel dan varians sampel. Biarkan X_{n+1} mempunyai taburan $N(\mu, \sigma^2)$ dan anggapkan bahawa $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ adalah tak bersandar. Cari taburan bagi

   $$\frac{(X_{n+1} - \bar{X})\sqrt{n/(n+1)}}{S}$$

   dengan menggunakan keputusan-keputusan taburan pensampelan.

   (30/100)

.../2

(c) Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan Gamma $(\alpha, 1)$, cari f.k.k. bagi $\bar{X}$.

(20/100)

2. (a) Biarkan $Y_1 < Y_2 < Y_3$ menandakan set statistik tertib bagi suatu sampel rawak saiz 3 daripada taburan eksponen dengan f.k.k.

$$f(x) = \theta e^{-x\theta} I_{(0,\infty)}(x), \ \theta > 0.$$

Tunjukkan bahawa $Y_3 - Y_1$ dan Y_1 adalah tak bersandar secara stokastik.

(40/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan seragam pada selang $(0, \theta)$ dan biarkan $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ menandakan statistik tertib yang sepadan. Cari taburan penghad bagi pembolehubah rawak $W_n = nY_1$.

(40/100)

(c) Nilaikan yang berikut

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{w} \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-n(t-\mu)^2/2\sigma^2} \, dt$$

(20/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x\ ;\ \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

Cari penganggar kaedah momen bagi θ.

(20/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots X_n$ menandakan suatu sampel rawak saiz n daripada taburan $N(0, \theta)$, $0 < \theta < \infty$.

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ dan tunjukkan bahawa ianya penganggar saksama bagi θ.

..../3

(ii) Cari batas bawah Rao-Cramer (BBRC) bagi varians penganggar-penganggar saksama bagi θ dan tunjukkan bahawa varians penganggar kebolehjadian maksimum diatas mencapai BBRC ini.

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel rawak daripada taburan $N(\theta, \theta)$, $\theta > 0$.

(i) Cari statistik cukup dan lengkap, sekiranya wujud.

(ii) Cari penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi suatu fungsi θ.

(40/100)

4. (a) Andaikan X merupakan suatu cerapan *tunggal* daripada taburan dengan f.k.k. $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x)$.

(X, 2X) adalah suatu selang keyakinan bagi θ. Apakah pekali keyakinannya?

(25/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan Gamma $(4, \theta)$. Berdasarkan min sampel, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i$, terbitkan

(i) selang keyakinan hampiran 95% bagi θ apabila n = 100

(ii) selang keyakinan 95% bagi θ apabila n = 5.

(50/100)

(c) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$ dan $0 < a < b$. Berikut ialah selang keyakinan 95% bagi σ^2 apabila μ tidak diketahui.

$$\left[\sum_{1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/b \;,\; \sum_{1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/a \right]$$

(i) Cari jangkaan matematik bagi panjang selang rawak di atas.

(ii) Tentukan nilai a dan b diberi n = 10.

(25/100)

.../4

5. (a) Andaikan X menandakan suatu cerapan *tunggal* daripada taburan dengan f.k.k. $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \theta > 0$.

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz α bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta = 2$.

(ii) Untuk menguji $H_0 : \theta \le 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut di gunakan : Tolak H_0 jika $X \ge 3/4$. Cari fungsi kuasa dan saiz bagi ujian tersebut.

(50/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ menandakan suatu sampel rawak saiz 100 daripada taburan dengan f.k.k.
$f(x;\theta) = \theta e^{-x\theta} I_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$.

(i) Cari ujian paling berkuasa secara seragam (UPBS) bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta > 2$

(ii) Bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta \neq 1$, ujian berikut digunakan : Tolak H_0 jika $| \bar{X} - 1 | \ge K$. Cari nilai K apabila $\alpha = 0.05$.

(50/100)

- ooo000ooo -

Nama Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian (f.k.k.)	Min $\mu = E[x]$	Varians $\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$	Fungsi Penjana Momen $E[e^{tx}]$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	q/p	q/p^2	$\frac{p}{1 - qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	μ	σ^2	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = (\frac{1}{2})^{r/2} e^{-x/2} \frac{x^{r/2-1}}{\left(\frac{r}{2}-1\right)!} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$, $t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	-