

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1989/90

Jun 1990

MAT361 - Pentaabiran Statistik

[Masa: 3 jam]

---

Jawab SEMUA soalan. Mulakan setiap soalan pada halaman yang baru.

1. (a) Biarkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan  $N(\mu_x, \sigma^2)$  dan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  menandakan suatu sampel rawak saiz  $m$  daripada taburan  $N(\mu_y, \sigma^2)$  dengan kedua-dua sampel rawak bersifat tak bersandar. Takrifkan

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{1}^n X_i \quad \text{dan} \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{1}^m Y_i$$

Dengan menggunakan keputusan-keputusan bagi taburan pensampelan, dapatkan taburan setiap pembolehubah rawak berikut:

(i)  $\frac{1}{2} (\bar{X} + \bar{Y})$

(ii)  $\frac{1}{n} \sum_{1}^n (X_i - \mu_x)/\sigma = (\bar{X} - \mu_x)/\sigma$

(iii)  $\frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 \right]$

$$(iv) \quad \frac{(m-1) \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1) \sum_1^m (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$(v) \quad \frac{\sqrt{n(n-1)} (\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

(30/100)

- (b) Andaikan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan  $N(0, 1)$ . Takrifkan  $S^2$  sebagai

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$$

Adalah diketahui bahawa  $nS^2$  tertabur secara khi kuasa dua dengan  $(n-1)$  darjah kebebasan.

- (i) Tunjukkan bahawa  $S^2$  mempunyai taburan gamma  $\left[ \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} \right]$ .

- (ii) Dapatan min dan varians bagi  $S^2$ .

(35/100)

- (c) Biarkan  $\bar{X}_n$  menandakan min suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan Poisson dengan parameter  $\lambda = \mu > 0$ .

- (i) Tunjukkan bahawa  $\bar{X}_n$  menumpu secara stokastik kepada  $\mu$ .

- (ii) Tunjukkan bahawa taburan penghad bagi

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) / \sqrt{\bar{X}_n}$$

adalah  $N(0, 1)$ .

(35/100)

2. (a) Andaikan  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$  sebagai statistik tertib bagi suatu sampel rawak saiz  $n$  yang mempunyai fungsi taburan  $F(x) = x^\alpha$ ,  $0 < x < 1$  dan sifar di tempat lain dengan  $\alpha > 0$ . Tunjukkan bahawa  $Y_1/Y_n$  dan  $Y_n$  adalah tak bersandar secara stokastik.

(40/100)

- (b) Biarkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak daripada taburan seragam pada selang  $(\theta_1, \theta_2)$  dengan f.k.k.

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} I_{[\theta_1, \theta_2]}(x) .$$

Cari penganggar kaedah momen bagi  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ .

(30/100)

- (c) Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak daripada taburan  $N(0, \theta)$  dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/2\theta} I_{(-\infty, \infty)}(x) ,$$

cari penganggar kebolehdjian maksimum bagi  $\theta$  dan tentukan sama ada penganggar tersebut penganggar saksama atau tidak.

(30/100)

3. (a) Andaikan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0, \infty)}(x) , \quad \theta > 0 .$$

- (i) Cari statistik cukup dan lengkap.  
 (ii) Cari batas bawah Rao-Cramér (BBRC) bagi varians penganggar-penganggar saksama  $1/\theta$ .  
 (iii) Cari penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi  $1/\theta$ .  
 (iv) Cari PSVMS bagi  $\theta$ .

[Petua: Dapatkan taburan bagi  $Y = \ln(1 + X)$ ]

(50/100)

- (b) Biarkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak daripada taburan geometri dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^x I_{\{0, 1, 2, \dots\}}(x), \quad 0 < \theta < 1.$$

- (i) Cari penganggar kaedah momen bagi  $\theta$ .
- (ii) Cari PSVMS bagi  $(1-\theta)/\theta$  dan tunjukkan bahawa variansnya mencapai BBRC bagi varians panganggar-penganggar saksama  $(1-\theta)/\theta$ .
- (iii) Cari PSVMS bagi  $1/\theta$  jika wujud.

(50/100)

4. (a) Biarkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan  $N(\theta, \theta^2)$ ,  $\theta > 0$ .

- (i) Berikan satu contoh kuantiti pangsi dan gunakannya untuk mendapatkan panganggar selang bagi  $\theta$ .
- (ii) Cari jangkaan bagi panjang selang rawak di atas.

(30/100)

- (b) Biarkan  $X_1, X_2$  menandakan suatu sampel rawak saiz 2 daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = I_{[\theta-1/2, \theta + 1/2]}(x),$$

dan biarkan  $Y_1 < Y_2$  menandakan statistik tertib yang sepadan. Cari pekali keyakinan bagi selang keyakinan  $(Y_1, Y_2)$ .

(20/100)

- (c) Andaikan  $X$  suatu cerapan tunggal daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

- (i) Untuk menguji  $H_0 : \theta \leq 1$  lawan  $H_1 : \theta > 1$ , cari fungsi kuasa dan saiz ujian yang diberikan seperti berikut: Tolak  $H_0$  jikka  $X \geq 1/2$ .

- (ii) Cari ujian paling berkuasa bersaiz  $\alpha$  untuk menguji  $H_0: \theta = 2$  lawan  $H_1: \theta = 1$ .

(20/100)

- (d) Biarkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  menandakan suatu sampel rawak saiz  $n$  daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} I_{(0,1)}(x).$$

- (i) Tunjukkan bahawa rantau genting paling berkuasa secara seragam untuk menguji  $H_0: \theta = \theta_0$  lawan  $H_1: \theta > \theta_0$  adalah dalam bentuk  $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n -\ln x_i \geq k\}$ .
- (ii) Jika  $n = 2$ ,  $\theta_0 = 1$  dan  $\alpha = 0.05$ , cari nilai  $k$ .

[Petua:  $Y = -\ln X \sim \text{gamma}(1, 1/\theta)$ ]

(30/100)

-ooo00ooo-

Nama Taburan	Fungsi Ketumpatan Kebarangkalian (f.k.k.)	Min $\mu = E[x]$	Varians $\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$	Fungsi Penjana Momen $E[e^{tx}]$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	q/p	q/p <sup>2</sup>	$\frac{p}{1 - qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{be^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	$\mu$	$\sigma^2$	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} e^{-x/2} \frac{x^{r/2-1}}{\left(\frac{r}{2} - 1\right)!} I_{(0,\infty)}(x)$	r	2r	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	-