UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT320 - Persamaan Pembezaan II

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Tunjukkan $x = 0$ ialah titik biasa bagi persamaan

$$(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0.$$

Dapatkan penyelesaian am siri kuasa disekitar $x = 0$.

(40/100)

(b) Andaikan x_0 ialah titik nalar persamaan pembezaan biasa linear homogen peringkat dua

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Apakah syarat-syarat supaya x_0 merupakan titik nalar sekata persamaan (1)? Terangkan kaedah Frobenius untuk mendapat satu penyelesaian tak remeh persamaan (1).

(40/100)

(c) Selesaikan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$$

(20/100)

2. (a) Dapatkan nilai-nilai eigen dan fungsi-fungsi eigen bagi masalah Sturm-Liouvile

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = 0, \; y(\pi) = 0$$

(30/100)

(b) Dapatkan siri trigonometri Fourier bagi fungsi $f(x)$ pada $-\pi \leq x \leq \pi$ di mana $f(x)$ ditakrifkan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(30/100)

(c) Persamaan

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

di mana α suatu pemalar disebut <u>Persamaan Legendre</u>.
Jika p_m, p_n adalah dua polinomial Legendre yang berdarjah m dan n masing-masing, tunjukkan

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\, p_n(x)\,dx = 0 \quad \text{jika} \quad m \neq n$$

(40/100)

3. (a) Pertimbangkan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 36\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Tentukan sama ada persamaan ini hiperbolik, parabolik atau eliptik. Dapatkan suatu penyelesaian persamaan ini yang mengandungi dua fungsi sebarangan.

(20/100)

(b) Guna Kaedah pemisahan pembolehubah untuk mendapat suatu penyelesaian formal $y(x, t)$ bagi masalah

$$2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 3\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$y(0, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$

$y(2\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$

$y(x, 0) = 2\sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$\dfrac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 3\sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

(80/100)

.../3

4. Katakan $\underset{\sim}{\phi}_0$ ialah sebarang penyelesaian persamaan pembezaan vektor tak homogen

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{F}(t) \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

dan $\underset{\sim}{\phi}_1, \underset{\sim}{\phi}_2, \dots, \underset{\sim}{\phi}_n$ membentuk suatu set asasi penyelesaian-penyelesaian bahagian homogen sepadan (2) iaitu

$$\frac{d\underset{\sim}{x}}{dt} = A(t)\underset{\sim}{x} \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (3) .$$

(a) Buktikan vektor fungsi $\underset{\sim}{\phi}_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \underset{\sim}{\phi}_k$ juga penyelesaian (2) bagi setiap pilihan nombor-nombor $c_1, \dots, c_n$; dan

(50/100)

(b) suatu penyelesaian sebarangan $\underset{\sim}{\phi}$ bagi persamaan (2) berbentuk $\underset{\sim}{\phi}_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \underset{\sim}{\phi}_k$ untuk suatu pilihan $c_1, \dots, c_n$ yang sesuai.

(50/100)

<u>NOTA</u>

Sebarang teorem yang digunakan untuk pembuktian di atas hanya perlu disebut dan tak perlu dibuktikan.

- oo0oo -