UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT313 - Aljabar Moden I

Masa: [3 jam]

Jawab mana-mana LIMA soalan.

1. (a) Katakan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan S = set semua fungsi dari A ke B. Cari

   (i) bilangan fungsi di dalam S.

   (ii) bilangan fungsi yang satu-ke-satu di dalam S.

   (20/100)

   (b) Fungsi $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ditakrifkan dengan

   $$(x)f = x^2 - 13x + 40$$

   Tunjukkan bahawa f tidak satu-ke-satu dan tidak keseluruh.

   (20/100)

   (c) Katakan A, B, C tiga set dan $f: A \to B$, $g: B \to C$ dua fungsi. Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

   (i) Jika f dan g satu-ke-satu, maka $f \circ g$ satu-ke-satu.

   (ii) Jika f dan g keseluruh, maka $f \circ g$ keseluruh.

   (iii) Jika $f \circ g$ satu-ke-satu, maka f satu-ke-satu.

   (iv) Jika $f \circ g$ keseluruh, maka f keseluruh.

   (40/100)

   (d) Operasi dedua $*$ ditakrifkan atas $\mathbb{R}$ dengan

   $$x * y = |xy|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

   Buktikan identiti tidak wujud.

   (20/100)

2. (a) Hubungan H ditakrifkan atas $\mathbb{Z}$ oleh

$$(x, y) \in H \Leftrightarrow xy > 0$$

Tentukan sama ada H

(i) refleksif

(ii) simetri

(iii) transitif

Carilah $[1]H$ dan $[-2]H$.

(25/100)

(b) Katakan $\langle G, *\rangle$ suatu kumpulan yang memenuhi:

$$x * x = e \quad \text{bagi semua} \quad x \in G$$

Di sini e ialah unsur identiti.
Buktikan $a * b = b * a$ bagi semua $a, b \in G$.

(25/100)

(c) Katakan $G = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^{10} = e\}$ suatu kumpulan kitaran dengan $|G| = 10$. Cari semua penjana bagi G.

(10/100)

(d) Katakan $\langle G, *\rangle$ suatu kumpulan dan $a, b \in G$. Jika $a * b = b * a$, buktikan bahawa

$$(a * b)^n = a^n * b^n \quad \text{bagi semua integer } n.$$

(40/100)

3. (a) Cari peringkat pilihatur-pilihatur yang berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\beta = (1 \quad 2 \quad 3)(1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)$$

(20/100)

(b) (i) Tunjukkan bahawa jika $a \neq 1$, $b \neq 1$ dan $a \neq b$, maka transposisi $(a\ b)$ dapat ditulis sebagai

$$(a\ b) = (1\ a)(1\ b)(1\ a)$$

.../3

(ii) Tulis pilihatur

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

sebagai hasil darab transposisi-transposisi yang berikut:

$$(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (1\ 5),\ (1\ 6),\ (1\ 7),\ (1\ 8)$$

(30/100)

(c) Katakan α dan f seperti diberikan di bahagian (a) dan (b). Cari

(i) bilangan unsur di dalam A_8

(ii) bilangan unsur di dalam $A_8\langle\alpha\rangle$

(iii) bilangan unsur di dalam $A_8\langle f\rangle$.

(30/100)

(d) Buktikan bahawa jika peringkat pilihatur $\alpha \in S_n$ adalah integer ganjil, maka α adalah suatu pilihatur genap.

(20/100)

4. (a) (i) Katakan $H = \{e, (12)\}$.
Cari semua koset kanan bagi H di dalam S_3.

(ii) Tentukan sama ada H normal di dalam S_3 atau tidak.

(30/100)

(b) Katakan H suatu subkumpulan bagi kumpulan terhingga G.
Jika $|G| = 2|H|$ buktikan bahawa H adalah subkumpulan normal.

(30/100)

(c) Katakan H suatu subkumpulan bagi kumpulan G dan N suatu subkumpulan normal bagi G.
Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

(i) HN adalah subkumpulan bagi G.

(ii) $H \cap N$ adalah subkumpulan bagi G.

(iii) $H \cap N$ adalah normal di dalam G.

(40/100)

5. (a) Katakan H suatu subkumpulan bagi kumpulan terhingga $<G, *>$ dan $a \varepsilon G$. Buktikan bahawa bilangan unsur di dalam H sama dengan bilangan unsur di dalam Ha.

(30/100)

(b) Katakan H suatu subkumpulan bagi kumpulan terhingga $<G, *>$ buktikan bahawa $|G|$ terbahagikan oleh $|H|$.

(30/100)

(c) Katakan G suatu kumpulan terhingga dan $|G| = n$. Buktikan bahawa

$g^n = e$ bagi semua $g \varepsilon G$. Di sini e ialah

unsur identiti.

(30/100)

(d) Terangkan sebab S_3 tidak mengandungi subkumpulan yang berperingkat 4.

(10/100)

6. (a) Katakan $G = <a>$ suatu kumpulan kitaran dan $|G| = n$. Katakan m ialah suatu integer positif dan fungsi $f: G \rightarrow G$ ditakrifkan oleh

$$(x)f = x^m \quad \text{bagi semua} \quad x \varepsilon G.$$

(i) Tunjukkan bahawa f adalah suatu homomorfisma.

(ii) Jika pembahagi sepunya terbesar bagi m dan n sama dengan 1, tunjukkan bahawa f adalah suatu isomorfisma.

(40/100)

(b) Katakan $G = \{(x, y) \mid x \varepsilon \mathbb{Z} \text{ dan } y \varepsilon \mathbb{Z}\}$
Dua operasi $\oplus$ dan $\otimes$ ditakrifkan atas G oleh:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$

Tunjukkan bahawa $<G, \oplus, \otimes>$ adalah suatu gelanggang tetapi bukan suatu domain integer.

(40/100)

.../5

(c) Katakan $<G, +, \times>$ suatu gelanggang yang memenuhi syarat $g^2 = g$ bagi semua $g \in G$. Buktikan bahawa $a \times b = b \times a$ bagi semua $a, b \in G$.

(20/100)

- oooOOooo -