UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT301 - Analisis Kompleks

Masa: [3 jam]

Jawab KESEMUA soalan.

1. (i) Katakan $z = a + ib$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Takrifkan konjugat dan modulus untuk z.

   Tunjukkan bahawa $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ dan $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$. Justru itu buktikan

   $$\left| \frac{\overline{\alpha}^n - \overline{\beta}^n}{\overline{\alpha} - \overline{\beta}} \right| \leq \frac{|\alpha|^n - |\beta|^n}{|\alpha| - |\beta|}$$

   untuk $|\alpha| \neq |\beta|$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

   (ii) Selesaikan $z^2 + 4z + 4(1 - i) = 0$.

   (iii) Untuk $r = |z| > 0$, dari takrif bahawa

   $$z = x + iy = re^{i\theta}$$

   kita akan mentakrifkan

   $$\ln z = \ln r + i\theta.$$

   Tunjukkan bahawa $e^{\ln z} = z$ dan $\ln e^z = z + 2\pi ik$, dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Justru itu tunjukkan

   $$\ln \alpha\beta = \ln \alpha + \ln \beta + 2\pi ik.$$

   (100/100)

2. (i) Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah analisis dalam suatu domain D serta masing-masing tidak secaman dengan sifar, tunjukkan bahawa

   $$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\alpha} \frac{f'(z)}{g'(z)} ,$$

dengan $f(\alpha) = 0$ dan $g(\alpha) = 0$.

Carikan;

(a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z + e^{-z} - 2}{1 - \cos 2z}$, (c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\cosh z}{z^2}$

(b) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{e^{2z}}{z^2}$,

(sebarang teorem yang digunakan perlu dinyatakan dengan jelas, tanpa pembuktian).

(ii) Untuk n integer positif, carikan punca-punca persamaan

$$z^n = 1.$$

Katakan punca-punca tersebut ialah z_k, dengan $k = 1, 2, \ldots, n$.
Tunjukkan bahawa

$$z_1^m + z_2^m + z_3^m + \ldots + z_n^m = \begin{cases} 0, & \text{jika } m \neq pn \\ n, & \text{jika } m = pn. \end{cases}$$

Di sini p ialah sebarang integer.

(100/100)

3. (i) Jika f adalah fungsi analisis dan f' selanjar di setiap titik di dalam dan juga di atas C, dengan C sebagai suatu kontur yang simpel dan tertutup, buktikan bahawa

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Jika $0 < a < 2$, kamirkan $\dfrac{2 + z}{(2 - z)z} \equiv \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{2 - z}$

melalui bulatan $|z| = a$ untuk menunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4 - 4a\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi}{4 - a^2}.$$

Apakah nilai kamiran ini jika $a > 2$?

(ii) Nyatakan dengan jelas Rumus kamiran Cauchy. Dari rumus tersebut, atau dengan cara lain, nilaikan

$$I_1 = \int_C \frac{e^z \cosh z}{(z - \pi)} \, dz ,$$

dengan C diberi oleh segiempatsama yang bersisikan $x = \pm\frac{7}{2}$, $y = \pm\frac{7}{2}$. Nilaikan juga

$$I_2 = \int_C \frac{e^z \cosh z}{(z - \pi)^3} \, dz.$$

(100/100)

4. (i) Nyatakan dengan jelas Teorem Reja Cauchy. Berikan garis kasar bagaimana menyelesaikan

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta ,$$

dengan f sebagai satu fungsi yang diberi. Justru itu selesaikan

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta} .$$

(ii) Jika C diberi oleh $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, dengan ρ pemalar, tunjukkan

$$\int_C |e^{iz}| |dz| < \pi .$$

(100/100)

5. (i) Dengan mengkamirkan $e^{az}/(e^z + 1)$, $0 < a < 1$, melalui empatsegi tepat yang berbucu $-R$, R, $R + 2\pi i$ dan $-R + 2\pi i$, atau melalui kaedah lain, tunjukkan bahawa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} \, dx = \pi \sec \frac{\pi a}{2} .$$

(ii) Dengan memperhatikan bahawa $\frac{\sin \pi x}{x(1 - x^2)}$ adalah fungsi genap, tunjukkan bahawa

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1 - x^2)}\, dx = \pi .$$

(100/100)

- oooOOooo -