

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

MAT261 - Teori Kebarangkalian I

Masa: [3 jam]

Jawab KELIMA-LIMA soalan.

1. (a) Andaikan A dan B adalah dua peristiwa dengan $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$. Tunjukkan bahawa

(i) $(A \cup \bar{B}) \cap \overline{(A \cap B)} = \bar{B}$

(ii) $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(\bar{A})}{P(B)}$

(20/100)

- (b) Sebuah kotak mempunyai 6 biji bola hitam dan 4 biji bola putih. Tiga biji bola dikeluarkan daripada kotak tersebut tanpa mengambil kira warnanya.

- (i) Cari kebarangkalian bahawa bola keempat yang dikeluarkan daripada kotak tersebut berwarna putih.
- (ii) Jika didapati sekurang-kurangnya satu daripada bola yang dikeluarkan berwarna hitam apakah kebarangkalian bahawa ketiga-tiga bola yang dikeluarkan tadi berwarna hitam.

(50/100)

- (c) Andaikan seorang pengedar menerima sebuah lot yang mengandungi 50 buah televisyen daripada sebuah syarikat pengeluar di Hong Kong. Dia membuat keputusan untuk menerima atau menolak lot tersebut berdasarkan satu sampel yang mengandungi tiga buah televisyen.

Jika tiada televisyen yang rosak di dalam sampel itu, lot tersebut diterima. Jika berlaku sebaliknya, lot itu dipulangkan.

- (i) Jika sememangnya ada 5 buah televisyen yang rosak di dalam lot tersebut cari kebarangkalian bahawa lot itu diterima.

- (ii) Jika terdapat 10 buah televisyen yang rosak di dalam lot itu, cari kebarangkalian bahawa lot itu dipulangkan.

(30/100)

2. (a) Suatu pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k. yang berikut.

$$f(x) = \begin{cases} (1 + c)^{-k} \left(\frac{c}{1 + c}\right)^x \frac{(k + x - 1)!}{x!(k - 1)!}, & x = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{, di tempat lain.} \end{cases}$$

di sini c dan k adalah pemalar positif.

Tunjukkan bahawa $E(X) = kc$ dan $Var(X) = kc(c + 1)$.

(30/100)

- (b) Diberi bahawa

$$P(X > x) = 1 - \frac{x^3}{64}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

- (i) Dapatkan $E(X)$ dan $Var(X)$.

- (ii) Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev dapatkan suatu batas bawah bagi $Pr(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$.

(30/100)

- (c) Pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x^4} & , \quad x < -1 \\ \frac{(2 - x^2)}{4} & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4x^4} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Cari fungsi taburan longgokan bagi $Y = |X|$ dan seterusnya dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi Y .

(40/100)

.../3

3. (a) Katakan pembolehubah rawak (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{x^2 y} & , \quad 1 \leq x < \infty, \frac{1}{x} \leq y \leq x. \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Dapatkan

- (i) nilai c .
- (ii) f.k.k. sut untuk X dan f.k.k. sut untuk Y .
- (iii) f.k.k. bersyarat $h_1(x|y)$.
- (iv) Adakah X dan Y tak bersandar.

(40/100)

- (b) Katakan

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \binom{x_1}{x_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{x_1}{15}\right), & \begin{matrix} x_2 = 0, 1, \dots, x_1 \\ x_1 = 1, \dots, 5 \end{matrix} \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

adalah f.k.k. tercantum bagi X_1 dan X_2 .

Tentukan

- (a) $E(X_2|X_1)$
- (b) $E(X_2)$
- (c) $E(X_1 X_2)$
- (d) $\rho_{X,Y}$

(60/100)

4. (a) Suatu pembolehubah rawak dikatakan bertaburan Rayleigh jika f.k.k. nya berbentuk seperti:

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, & x \geq 0, \alpha > 0 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan momen ke k untuk pembolehubah rawak X .

(ii) Dengan menggunakan (i) dapatkan $E(X)$ dan $\text{Var}(X)$.

(iii) Dapatkan f.p.m bagi $Y = X^2$ dan nyatakan f.k.k. bagi Y .

(50/100)

(b) Katakan X dan Y adalah dua pembolehubah rawak yang tak bersandar dan setiap satunya bertaburan seragam di atas selang $(0, 1)$.

Cari

(a) $\Pr(|X - Y| \leq .5)$

(b) $\Pr\left(\left|\frac{X}{Y} - 1\right| \leq .5\right)$

(c) $\Pr(Y \geq X \mid Y \geq \frac{1}{2})$.

(50/100)

5. (a) Katakan p.r. X mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Katakan p.r. Y mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(y) = \begin{cases} e^{-(y-2)}, & 2 < y < \infty \\ 0, & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Anggapkan X dan Y tak bersandar, tentukan

(i) f.k.k. tercantum bagi $U = \frac{X}{Y}$ dan $V = Y$.

(ii) f.k.k. sut bagi p.r. U .

(iii) Adakah U dan V saling tak bersandar.

(40/100)

(b) Katakan X_1, \dots, X_n adalah n p.r. yang tak bersandar dan setiap p.r. mempunyai f.k.k. sepunya, iaitu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

.../5

Takrifkan m_i sampel sebagai $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

$$\text{dan } Y = \frac{\sqrt{n} \bar{X}}{\sigma}.$$

- (i) Dapatkan f.k.k bagi \bar{X} .
- (ii) Dapatkan f.k.k bagi Y .
- (iii) Berikan f.k.k bagi $V = Y^2$.

(60/100)

- ooo0oooo -