UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akadmeik 1991/92

Mac/April 1992

MAT261 - Teori Kebarangkalian I

Masa : [3 jam]

Jawab **LIMA** soalan.

1. Sebuah beg mengandungi 4 bola putih dan 4 bola hitam. Tiga biji bola dikeluarkan dari pada beg ini dan dibuang (warna bola-bola ini tak diperhatikan). Kemudian sebiji bola dikeluarkan lagi daripada bola yang ditinggal.

   (i) Apakah kebarangkalian warna bola ini adalah putih?

   (ii) Jika warna bola ini adalah putih, apakah kebarangkalian dua antara tiga bola yang dibuang adalah hitam?

   (50/100)

   (b) Tentukan nilai c supaya fungsi diskret berikut menjadi f.k.k. bagi suatu pembolehubah rawak X.

   $$f(x) = c4^{-|x|}, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

   dan kemudian cari

   (i) fungsi taburan longgokan bagi X.

   (ii) E[X].

   (iii) Var(X).

   (50/100)

2. (a) Nyatakan dan buktikan teorem Markov.

   (30/100)

(b) Katakan X adalah pembolehubah diskret dengan min 5 dan varians 4. Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshew, cari satu batas bawah bagi

(i) $P(2 < X < 8)$.

(ii) $P(3 \le X < 7)$.

(40/100)

(c) Jika X adalah suatu pembolehubah supaya $P(X \le 0) = 0$ dan $\mu = E[X]$ wujud, tunjukkan bahawa

$$P(X \ge 2\mu) \le \frac{1}{2}.$$

(30/100)

3. (a) Katakan X adalah suatu pembolehubah rawak diskret yang mempunyai f.k.k. berikut

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , \ x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & , \ \text{d.t.l.} \end{cases}$$

tunjukkan bahawa fungsi penjana momen bagi X adalah

$$m(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

(30/100)

(b) Jika $\mu = np$ dan μ adalah sama bagi tiap-tiap n di dalam bahagian (a), tunjukkan bahawa

$$\lim_{n \to \infty} (1 - p + pe^t)^n = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

(40/100)

(c) Jika pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \ -2 < x < 2 \\ 0 & , \ \text{d.t.l.} \end{cases}$$

cari f.k.k. bagi $Y = X^2$.

(30/100)

4. (a) Katakan X dan Y adalah pembolehubah rawak selanjar yang mempunyai f.k.k.

$$f(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2} & , \quad 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$$

cari

(i) f.k.k. sut bagi X.

(ii) f.k.k. bersyarat Y diberi X = x.

(iii) $E[Y|X = x]$.

(iv) tunjukkan bahawa $E[E(Y|X)] = E[Y]$.

(50/100)

(b) Katakan (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , \quad 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa korelasi antara X dan Y adalah sifar. Adakah X dan Y tak bersandar?

(50/100)

5. (a) Jika X dan Y mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$$

(i) tunjukkan bahawa

$$P\left(\frac{1}{2} \le X + Y \le \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4} .$$

(ii) cari fungsi taburan longgokan bagi $Z = X + Y$.

(50/100)

(b) Katakan X_1 dan X_2 adalah dua pembolehubah tak bersandar dan masing-masing mempunyai f.k.k. secaman

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - 1}, & 1 < x < \beta \\ 0, & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

Katakan $Y_1 = X_1 X_2$ dan $Y_2 = X_1$, cari

(i) f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2.

(ii) f.k.k. sut bagi Y_1.

(50/100)

6. (a) Katakan $\frac{Y}{\sigma^2}$ mempunyai taburan $-\chi^2$ dengan darjah kebebasan 10. Tentukan f.k.k., min dan varians bagi Y.

(40/100)

(b) X dan Y adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar yang masing-masing mempunyai taburan khi-kuasa dengan darjah kebebasan 3. Dapatkan f.k.k. bagi $V = X/Y$ dan nilaikan $E[V]$.

(60/100)

- ooOoo -