

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1989/90

Mac/April 1990

MAT261 - Teori Kebarangkalian I

Masa: [ 3 jam ]

---

Jawab LIMA soalan.

1. (a) Nyatakan dan buktikan Teorem Bayes.

(20/100)

(b) Sebuah pasu mengandungi  $m$  biji bola putih dan  $n$  biji bola hitam. Daripada pasu ini,  $k$  biji bola dikeluarkan dan diletak ke tepi, warna bola-bola itu tidak diperhatikan. Kemudian, sebiji bola lain dikeluarkan dari pasu tersebut. Berapakah kebarangkalian bahawa bola itu berwarna putih?

(40/100)

(c) Sebuah beg mengandungi 10 keping duit syiling yang tak seimbang dengan kebarangkalian untuk mendapatkan kepala bagi duit syiling ke- $i$  adalah  $i/10$ . Sekeping duit syiling dipilih secara rawak dari beg ini dan dilambungkan.

(i) Adakah kebarangkalian untuk mendapatkan kepala dan bunga sama?

(ii) Jika kepala berlaku pada lambungan itu, berapakah kebarangkalian bahawa duit syiling ke-4 telah dipilih?

(40/100)

.../2

2. (a) Dapatkan nilai  $c$  supaya  $f(x)$  yang diberi di bawah memenuhi syarat-syarat f.k.k. bagi suatu pembolehubah rawak  $X$

$$f(x) = \begin{cases} c|1 - x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Kemudian, dapatkan fungsi taburan longgokan bagi  $X$ .

(30/100)

- (b) Nyatakan teorem Markov. Dengan menggunakan teorem ini, buktikan teorem Chebyshev.

(30/100)

- (c) Suatu pembolehubah rawak  $X$  mempunyai min 5 dan varians 9. Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev, dapatkan satu batas bawah bagi  $P(0 < X < 10)$ . Jika  $X$  tak negatif, dapatkan satu batas lain bagi kebarangkalian tersebut di atas.

(40/100)

3. (a) Jika pembolehubah rawak  $X$  mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases},$$

dapatkan f.k.k. bagi  $Y = -2 \log_e X$ .

(30/100)

- (b) Sebuah beg mengandungi  $n_1$  bola putih,  $n_2$  bola hitam dan  $n_3$  bola merah,  $k$  bola dipilih tanpa penggantian daripada beg itu. Katakan  $X$  dan  $Y$  masing-masing bilangan bola putih dan hitam yang dipilih, dapatkan f.k.k. tercantum bagi  $(X, Y)$ . Kemudian dapatkan f.k.k. sut masing-masing bagi  $X$  dan  $Y$ .

(30/100)

- (c) Katakan  $X$  mempunyai f.k.k.  $f(x)$  yang bersimetri pada  $c$ , tunjukkan bahawa  $E[X] = c$ .

(40/100)

.../3

4. (a) Suatu pembolehubah rawak selanjar  $X$  mempunyai f.k.k.  $f(x)$  dan fungsi penjana momen (f.p.m.)  $M_X(t)$ . Katakan  $Y = aX + b$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua pemalar, tunjukkan bahawa

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

di mana  $M_Y(t)$  adalah f.p.m. bagi  $Y$ .

(20/100)

- (b) Katakan  $Z$  adalah pembolehubah rawak dengan f.k.k. berikut:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty,$$

dapatkan f.p.m. bagi  $Z$ . Jika  $Z = (X - \mu)/\sigma$ , dapatkan f.p.m. bagi  $X$ . Kemudian, dapatkan  $E[X]$  dan  $\text{Var}(X)$ .

(50/100)

- (c) Katakan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah  $n$  pembolehubah rawak tak bersandar dan masing-masing mempunyai f.k.k. secaman

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

tunjukkan bahawa  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  bertaburan binomial negatif.

(30/100)

5. (a) Katakan f.k.k. tercantum bagi pembolehubah rawak bivariat  $(X, Y)$  adalah

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

.../4

Dapatkan:

- (i) fungsi taburan longgokan bagi (X, Y)
- (ii) f.k.k. sut bagi X
- (iii) f.k.k. bersyarat bagi Y diberi  $X = x$
- (iv)  $E\left[Y|X = \frac{1}{2}\right]$
- (v)  $\text{kov}(X, Y)$ .

(60/100)

- (b)  $X_1$  dan  $X_2$  adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar dan untuk  $i = 1, 2$ , f.k.k. bagi  $X_i$  adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i}, & x > 0, \lambda_i > 0 \\ 0, & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

Nilaikan  $P(X_1 > X_2)$ .

(40/100)

6. (a) Katakan  $X_1$  dan  $X_2$  tak bersandar dan masing-masing mempunyai f.k.k. secaman

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. sut masing-masing bagi  $Y_1 = X_1 + X_2$  dan  $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ .
- (ii) Tunjukkan bahawa  $Y_1$  dan  $Y_2$  tak bersandar.

(60/100)

.../5

- (b) Jika  $X_1$  dan  $X_2$  tak bersandar dan masing-masing mempunyai f.k.k. secaman

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{d.t.l.} \end{cases}$$

Dapatkan f.k.k. bagi (i)  $\min(X_1, X_2)$  dan (ii)  $\max(X_1, X_2)$ .

(40/100)

- oooOOooo -