UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT220 - Persamaan Pembezaan I

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Binakan suatu persamaan pembezaan linear dari fungsi

$$y = A(1 + x)^m + B(1 - x)^m$$

di mana A dan B adalah pemalar sebarangan.

(20/100)

(b) Carikan penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}\ , \qquad y(0) = 1.$$

Adakah penyelesaian ini unik? Terangkan.

(20/100)

(c) Tunjukkan bahawa persamaan

$$2\left(\frac{x + a}{y + b}\right)dx - \left(\frac{x + a}{y + b}\right)^2 dy = 0$$

adalah tepat. Selesaikan persamaan tersebut.

(20/100)

(d) Katakan $F_1(x, y)$ dan $F_2(x, y)$ adalah dua faktor pengamir bagi persamaan

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Jika F_2/F_1 bukan suatu pemalar, tunjukkan bahawa

$$\frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} = C$$

.../2

adalah penyelesaian am bagi persamaan tersebut.
(C suatu pemalar sebarangan).

(40/100)

2. (a) Selesaikan persamaan

$$y''(y - 1) = 2(y')^2$$

(20/100)

(b) Selesaikan persamaan Lagrange

$$y = x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 .$$

(25/100)

(c) Selesaikan persamaan Ricatti

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 .$$

(25/100)

(d) Tunjukkan bahawa persamaan Cauchy

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \qquad x > 0$$

boleh diperturunkan kepada persamaan

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a - 1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

dengan menggunakan penggantian pembolehubah $x = e^t$.
Selesaikan persamaan

$$x^2y'' - 2y = 0, \qquad x > 0$$

dengan menggunakan teknik ini.

(30/100)

3. (a) Gunakan kaedah perubahan parameter untuk mencari suatu penyelesaian khusus bagi persamaan

$$y'' + y = \sin x \cos x.$$

(25/100)

.../3

(b) Gunakan kaedah koefisien tak ditentukan untuk mencari suatu penyelesaian khusus bagi persamaan

$$y'' + y = 3\sin^2 x + x\cos 2x.$$

(25/100)

(c) Katakan suatu penyelesaian bagi persamaan Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0$$

ialah $J_0(x)$. Tunjukkan bahawa suatu penyelesaian kedua bagi persamaan ini ialah

$$J_0(x)\int \frac{1}{x[J_0(x)]^2}\,dx$$

(20/100)

(d) Buktikan atau sangkalkan bahawa suatu gabungan linear dari dua penyelesaian bagi persamaan

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

juga adalah suatu penyelesaian.

(30/100)

4. (a) Sepadan dengan persamaan peringkat kedua

$$\text{(A)}\quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

kita dapati suatu sistem persamaan

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -p(t)x_2 - q(t)x_1 \end{cases},$$

di mana $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Tunjukkan bahawa jika $\underset{\sim}{x}^1$ dan $\underset{\sim}{x}^2$ adalah suatu set asas penyelesaian bagi sistem persamaan (B), dan jika y_1 dan y_2 adalah suatu set asas penyelesaian bagi persamaan (A), maka

$$W[y_1, y_2] = cW[\underset{\sim}{x}^1, \underset{\sim}{x}^2]$$

di mana c adalah suatu pemalar yang tak sifar dan W adalah fungsi wronskian.

(50/100)

.../4

(b) Gunakan kaedah perubahan parameter untuk menyelesaikan sistem persamaan tak homogen

$$\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

(50/100)

- oooOOooo -