

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MAT220 - Persamaan Pembezaan I

Masa : [3 jam]

Jawab semua **EMPAT** soalan.

1. (a) (i) Selesaikan persamaan pembezaan pembolehubah terpisahkan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

dengan $y(0) = 1$.

- (ii) Tunjukkan $y = \frac{x + 1}{-x + 1}$ adalah suatu penyelesaian bagi masalah nilai awal dalam (i).

- (iii) Adakah masalah nilai awal dalam (i) mempunyai penyelesaian unik? Berikan alasan anda.

Jika penyelesaian adalah unik, mengapa keputusan dari (i) dan (ii) tidak bercanggah?

(40/100)

- (b) Dengan menggunakan kaedah matriks, selesaikan sistem persamaan pembezaan

$$\underline{\tilde{X}}'(t) = A \underline{\tilde{X}}(t)$$

di mana $\underline{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(30/100)

- (c) Tunjukkan bahawa persamaan

$$y F(xy) dx + x G(xy) dy = 0$$

boleh diselesaikan dengan menggunakan transformasi $u = xy$.

Dengan ini, selesaikan

$$(x^2 y^3 + 2x y^2 + y) dx + (x^3 y^2 - 2x^2 y + x) dy = 0.$$

(30/100)

2. (a) Untuk masalah nilai awal

$$y' = 2x(y + 1), \quad y(0) = 0$$

- (i) cari penyelesaian tepat $y(x)$.
- (ii) gunakan kaedah Picard, bermula dengan $y_0(x) = 0$, dapatkan $y_n(x)$ secara tak tersirat dan tunjukkan bahawa bagi semua x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$$

(25/100)

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan homogen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0 \quad \dots (*)$$

- (i) Tentusahkan bahawa $y = e^x$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan ini.
- (ii) Gunakan keputusan dalam (i) untuk mencari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan tak homogen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 1.$$

(30/100)

(c) Selesaikan $(y')^2 + (3y - 2x)y' - 6xy = 0$.

(20/100)

(d) Persamaan $(3xy^2 + 7x^3)dx + (4x^2y + 3\sqrt{xy}) dy = 0$ mempunyai suatu faktor pengkamir x^k . Tentukan nilai k dan kemudian selesaikan persamaan ini.

(25/100)

3. (a) Cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{(1-x)^2}$$

(30/100)

- (b) Dalam suatu model yang meramalkan kelakuan pengguna terhadap barangan A, pembolehubah yang asas, dengan masa t , adalah

$X(t)$ - paras pembelian bagi A

$Y(t)$ - sikap terhadap A

$H(t)$ - paras perhubungan bagi A (misalnya iklan)

dan pembolehubah ini dianggap dihubungi dengan

$$X' = b(Y - \beta X)$$

$$Y' = a(X - \alpha Y) + \gamma H$$

di mana a, b, α, β dan γ adalah nombor yang positif dan X', Y' adalah terbitan terhadap t .

- (i) Tunjukkan bahawa

$$X'' + (b\beta + a\alpha)X' + ab(\alpha\beta - 1)X = b\gamma H.$$

- (ii) Katakan paras perhubungan bagi A dijadikan tetap sepanjang masa, iaitu

$$H(t) = h \quad \text{bagi semua } t > 0$$

(h adalah suatu nombor tetap),

tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi persamaan pembezaan peringkat kedua dalam (i) ialah

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\gamma h}{a(\alpha\beta - 1)},$$

di mana $\lambda_1 = \frac{1}{2} \{ -(b\beta + a\alpha) + [(b\beta - a\alpha)^2 + 4ab]^{1/2} \}$,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \{ -(b\beta + a\alpha) - [(b\beta - a\alpha)^2 + 4ab]^{1/2} \}$$

dan c_1, c_2 adalah pemalar sebarang.

(iii) Jika $\alpha\beta > 1$, tunjukkan bahawa

$$X \rightarrow \frac{\gamma h}{a(\alpha\beta - 1)} \quad \text{apabila } t \rightarrow \infty$$

(iaitu, paras pembelian mendekati suatu paras keseimbangan).

(45/100)

(c) Suatu sistem homogen nyata yang terdiri daripada dua persamaan pembezaan peringkat pertama mempunyai suatu matriks penyelesaian asasi

$$\begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix}$$

(i) Tunjukkan bahawa matriks $\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$ adalah juga suatu matriks penyelesaian asasi bagi sistem ini.

(ii) Bolehkah anda cari sebarang matriks penyelesaian asasi yang lain bagi sistem ini?

(25/100)

4. (a) Tunjukkan bahawa $\mu(y) = \frac{1}{y^3}$ adalah faktor pengkamir bagi persamaan

$$y(2y^2 - 3x^2)dx + 2x^3dy = 0$$

dan cari penyelesaian bagi persamaan ini dengan syarat $y(1) = 0$.

(25/100)

(b) Selesaikan

$$y'' + y' - 2y = 2x - 40 \cos 2x.$$

(25/100)

(c) Cari penyelesaian am bagi persamaan linear

$$y' + f'(x)y = f(x) f'(x)$$

di mana f adalah suatu fungsi terbezakan yang diberi.

(20/100)

(d) Suatu penyelesaian bagi persamaan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \dots (*)$$

ialah $(1+x)^2$ dan wronskian bagi sebarang dua penyelesaian bagi persamaan ini adalah malar.
Selesaikan persamaan ini.

(30/100)

-oo0oo-