UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa : [3 jam]

Jawab semua **LIMA (5)** soalan.

1. (a) Tunjukkan bahawa hubungan W atas $\mathbb{Z}$ yang ditakrifkan sebagai

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x-y \text{ adalah integer genap}\}$$

adalah refleksif, simetri dan transitif. Juga cari set hasil bahagi bagi W.

(b) (i) Jika A_1 dan A_2 merupakan dua set yang tak terhingga tetapi terbilangkan, tunjukkan bahawa set hasil darab $A_1 \times A_2$ terbilangkan juga.

(ii) B adalah set semua bulatan yang berpusat pada titik $(a,0)$ dengan jejari $r > 0$, di mana $a \in \mathbb{N}$ dan $r \in \mathbb{Q}$. Adakah B terbilangkan? Berikan alasan anda.

(100/100)

2. (a) Katakan d_1 dan d_2 adalah dua metrik atas set X. Takrifkan d sebagai

$$d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y), \quad x, y \in X .$$

(i) Tunjukkan bahawa d adalah juga suatu metrik atas X.

(ii) Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah suatu jujukan yang Cauchy dalam (X,d_1) dan Cauchy dalam (X,d_2), buktikan bahawa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah juga Cauchy dalam (X,d).

(b) Katakan $S \subseteq \mathbb{R}$ dan $u = \sup S$.

(i) Buktikan bagi setiap $\varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in S$ supaya $x_\varepsilon > u-\varepsilon$.

(ii) Dengan ini, buktikan bahawa

$\exists$ suatu jujukan $\{x_n\}$ dalam S yang menumpu kepada u.

(iii) Jika $S = \{(-1)^n(1-2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, cari sup S dan inf S. Juga, berikan suatu jujukan dalam S yang menumpu kepada sup S.

(100/100)

3. (a) Pertimbangkan $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa dan $A \subseteq \mathbb{R}$ yang diberikan sebagai

$$A = (0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

(i) Cari titik pedalaman bagi A.

(ii) Cari titik had bagi A.

(iii) Adakah A terbuka atau tertutup dalam $\mathbb{R}$? Berikan alasan.

(iv) Adakah A padat? Berikan alasan.

(v) Adakah A terkait? Berikan alasan.

(b) (i) Nyatakan ujian Weierstrass-M.

(ii) Tunjukkan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(iii) Jika $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, adakah f selanjar pada $\mathbb{R}$? Berikan alasan anda.
Tunjukkan

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{1}{n} .$$

(100/100)

4. (a) Katakan $x_1 = 7$ dan $x_{n+1} = 7 - \frac{6}{x_n}$ bagi $n \geq 1$.

 (i) Tunjukkan $x_n \geq 6$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

 (ii) Tunjukkan jujukan $\{x_n\}$ menyusut.

 (iii) Adakah wujud $\lim_{n\to\infty} x_n$? Berikan alasan. Jika had ini wujud, carinya.

 (b) (i) Nyatakan Teorem Nilai Pertengahan.

 (ii) Jika $f : [0, 1] \to [0, 1]$ adalah suatu fungsi yang selanjar, buktikan bahawa wujud $p \in [0, 1]$ supaya $f(p) = p$.

 (iii) Katakan $h : [0, 1] \to [0, 1]$ adalah suatu fungsi yang selanjar dan takrifkan

$$g(x) = \sqrt{1 - (h(x))^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Tunjukkan bahawa g selanjar dalam [0, 1].

Adakah keselanjaran g ini seragam pada [0, 1]? Berikan alasan anda.

Tunjukkan wujud $a \in [0, 1]$ supaya

$$a^2 + (h(a))^2 = 1.$$

(100/100)

5. (a) $\mathcal{F} = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di mana $I_n = [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}]$, suatu selang tertutup pada $\mathbb{R}$. Cari $\cap \mathcal{F}$ dan $\cup \mathcal{F}$.

 (b) (i) Katakan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang selanjar pada $a \in \mathbb{R}$ dan $f(a) > 0$. Tunjukkan bahawa wujud suatu $\delta > 0$ supaya

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in B(a, \delta).$$

 (ii) Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$, adakah set $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ terbuka atau tertutup dalam $\mathbb{R}$? Berikan alasan.

(iii) Katakan $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah dua fungsi yang selanjar pada $\mathbb{R}$ dan

$$g(x) \le h(x) , \quad \forall x \varepsilon A$$

di mana $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah tumpat dalam $\mathbb{R}$. Dengan menggunakan (i) atau cara yang lain, tunjukkan bahawa

$$g(x) \le h(x) , \quad \forall x \varepsilon \mathbb{R} .$$

[$A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan tumpat dalam $\mathbb{R}$ jika $\bar{A} = \mathbb{R}$.]

(c) Jujukan fungsi $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ditakrifkan sebagai

$$f_n(x) = x e^{-nx^2} , \quad x \varepsilon [-1, 1], \quad n \varepsilon \mathbb{N} .$$

(i) Cari fungsi had $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\{f_n(x)\}$ menumpu secara seragam pada $[-1, 1]$.

(100/100)

- oooOooo -