UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

MAT202 - Pengantar Analisis

[Masa : 3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $S = (0, \sqrt{2}) \cap Q^p$
$= \{x : x \text{ nombor tak nisbah pada } (0, \sqrt{2})\}$.

(i) Dapatkan sup S dan inf S.
(ii) Tunjukkan S tak terbilangkan.
(iii) Dapatkan S^0 dan S'.
(iii) Adakah set S terbuka atau tertutup?

(b) Tunjukkan selang terbuka (0,10) merupakan set tak terhingga.

(c) Jika G_k adalah terbuka untuk $k = 1,2,\cdots,n$, buktikan bahawa $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ adalah terbuka. Berikan satu contoh kutipan set terbuka G_k, $k \in I^+$, supaya $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ adalah tak terbuka.

(d) Andaikan E sebagai subset pada N dan I_n, $n \in I^+$, sebagai selang-selang tertutup supaya

(i) panjang selang I_n, $|I_n| = \frac{1}{2^n}$,

(ii) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ dan

(iii) $E \cap I_n$ merupakan set tak terhingga.

Tunjukkan $E' \neq \emptyset$.

(100/100)

2. (a) Untuk $x, y \varepsilon N$, takrifkan xHy jika $|x-y| \leq 3$. Tunjukkan hubungan H memenuhi sifat refleksif dan simetri tapi tak memenuhi sifat transitif.

(b) Andaikan $D = \left\{\frac{1}{n} : n \varepsilon I^+\right\} \cup (-\infty, 0)$ dan $f : D \to N$ sebagai $f(x) = x^2$. Adakah f selanjar pada D?

(c) Andaikan fungsi nyata f adalah selanjar pada N. Tunjukkan

(i) set $\{x : f(x) > c\}$ adalah terbuka, c pemalar.

(ii) set $\{x : |f(x)| < 1\}$ adalah terbuka.

(iii) set $\{x : f(x) = g(x)\}$ adalah tertutup untuk fungsi g yang selanjar pada N.

(d) Jika $x \varepsilon E'$, buktikan bahawa wujud suatu jujukan $(x_n) \subset E$ dengan $x_n \to x$. Berikan satu contoh yang menunjukkan akas pernyataan di atas tidak benar.

(100/100)

3. (a) Tunjukkan $\lim\limits_{x \to 0} \text{kos}\left(\frac{1}{x}\right)$ tak wujud.

(b) Andaikan (x_n) sebagai jujukan nyata. Jika (x_n) jujukan Cauchy, buktikan (x_n) mesti menumpu.

(c) Jika jujukan nyata (x_n) memenuhi syarat

$$|x_k - x_\ell| < \frac{1}{k} + \frac{1}{\ell},$$

tunjukkan (x_n) menumpu.

(d) Andaikan

$$x_1 = \sqrt{5} \text{ dan } x_n = \sqrt{5 + x_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Tunjukkan $0 < x_n \leq 5$ untuk setiap integer positif n.
Tunjukkan (x_n) menumpu dan dapatkan had jujukan (x_n).

(100/100)

4. (a) Andaikan $f : N \to N$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$$

Tunjukkan f tak selanjar pada sebarang nombor.

(b) Andaikan $f : N \to N$ sebagai fungsi selanjar pada N dan $f(x) \in Q^p$ untuk setiap nombor x. Buktikan f merupakan fungsi malar.

(c) Andaikan f dan g sebagai fungsi selanjar pada $[a,b]$. Tunjukkan set $\{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$ adalah tertutup.

(d) Andaikan (x_n) sebagai jujukan Cauchy. Letakkan $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ dan $i_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. Jika $x_n \to x$, buktikan bahawa $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = x$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = x$. Berikan satu contoh jujukan terbatas (x_n) dengan $\lim\limits_{n \to \infty} s_n \neq \lim\limits_{n \to \infty} i_n$.

(100/100)

- ooOoo -