UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MAT202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

Perhatian: (i) Set semua nombor nyata akan dilambangkan dengan N.
(ii) Segala set akan dianggap sebagai subset kepada N.

1. Takrifkan yang berikut:

   (a) Set terhingga dan set terbilangkan
   (b) Supremum dan infimum set tak kosong S
   (c) Supremum dan infimum set kosong
   (d) Titik pedalaman dan titik had set S
   (e) Subjujukan
   (f) Jujukan Cauchy
   (g) Keselanjaran fungsi $f : S \to N$ pada nombor $a \in S$.

(100/100)

2. (a) Andaikan $E \subset N$. Buktikan dua pernyataan berikut adalah setara:

   (i) E tertutup,

   (ii) jika jujukan $(x_n) \subset E$ dan $x_n \to x$, maka $x \in E$.

   (b) Andaikan (x_n) sebagai jujukan nombor nyata. Buktikan (x_n) menumpu jika dan hanya jika (x_n) jujukan Cauchy.

(100/100)

3. (a) Andaikan $(x_n) \subset N$ sebagai jujukan menokok. Jika (x_n) terbatas dan $x = \sup\{x_n : n \text{ integer positif}\}$, tunjukkan $x_n \to x$.

.../2

(b) Andaikan jujukan nombor nyata (x_n) diberikan secara aruhan:

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \text{dan} \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}\ , \quad n \geq 2\ .$$

(i) Tunjukkan $0 < x_n \leq 2$ untuk setiap n.

(ii) Tunjukkan (x_n) jujukan menokok.

(iii) Dapatkan kesimpulan bahawa (x_n) menumpu dan seterusnya nilaikan had (x_n).

(100/100)

4. (a) Andaikan fungsi $f : D \to \mathbb{R}$ dan a sebagai titik had D. Buktikan $\lim_{x \to a} f(x) = H$ jika dan hanya jika untuk setiap jujukan $(x_n) \subset D$ dengan $x_n \to a$ dan $x_n \neq a$, jujukan $(f(x_n))$ menumpu ke H.

(b) Andaikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika x nombor nisbah} \\ 0 & \text{jika x nombor tak nisbah .} \end{cases}$$

Tunjukkan had f wujud pada x = 0. Dengan menggunakan jujukan, tunjukkan f tidak mempunyai had pada sebarang nombor tak sifar x.

(100/100)

5. (a) Andaikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sebagai fungsi selanjar pada $[a, b]$ dengan $f(a) > a$ dan $f(b) < b$. Buktikan wujud nombor $x \in (a, b)$ supaya $f(x) = x$.

(b) Andaikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebagai fungsi selanjar pada $\mathbb{R}$. Untuk sebarang nombor c yang ditetapkan, buktikan

(i) set $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$ terbuka di dalam $\mathbb{R}$

(ii) set $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$ terbuka di dalam $\mathbb{R}$

(iii) set $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c\}$ tertutup di dalam $\mathbb{R}$.

(100/100)

- oooOOooo -