UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1990/91

Jun 1991

MAT 202 - PENGANTAR ANALISIS

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Jika fungsi f dan g adalah keseluruh, buktikan bahawa fungsi gubahan $g \circ f$ juga adalah keseluruh.

   (b) Untuk dua nombor nyata x dan y dengan $x < y$, buktikan bahawa wujud suatu nombor tak nisbah z yang bersifat $x < z < y$.

   (c) Andaikan A dan B set terbatas dan

   $$C = A + B = \{ x + y : x \in A, y \in B \}.$$

   Tunjukkan bahawa $\sup C = \sup A + \sup B$.

   (d) Andaikan

   $$S = \{ x : x \text{ nombor nisbah pada } (0,2\pi) \}.$$

   (i) Dapatkan sup S dan inf S.
   (ii) Tunjukkan S adalah terbilangkan.
   (iii) Dapatkan S^{o} dan S'.
   (iv) Adakah set S terbuka atau tertutup?

(100/100)

2. (a) (i) Jika $G \subset E$ dan G terbuka, buktikan bahawa $G \subset E^{o}$.
   (ii) Jika $E \subset F$ dan F tertutup, buktikan bahawa $\bar{E} \subset F$.

   (b) Andaikan H sebagai hubungan kesetaraan pada X. Untuk $z \in X$, andaikan $[z] = \{ w \in X : w H z \}$. Buktikan bahawa untuk $x, y \in X$, $[x] = [y]$ atau $[x] \cap [y] = \phi$.

   (c) Jika E set terbuka, buktikan E^{P} adalah tertutup.

   (d) Jika $x \in E'$, tunjukkan bahawa wujud suatu jujukan $(x_n) \subset E$ dengan $x_n \to x$.

(100/100)

.../2

3. (a) Jika jujukan (x_n) menumpu ke x dan (y_n) menumpu ke y, tunjukkan jujukan $(x_n + y_n)$ menumpu ke $x + y$.

(b) Andaikan (x_n) jujukan terbatas dan menokok. Letakkan

$$x^* = \sup \{ x_n : n \in I^+ \}.$$

Buktikan $x_n \longrightarrow x^*$.

(b) Jika (x_n) jujukan Cauchy, tunjukkan (x_n) adalah terbatas.

(c) Andaikan

$$x_1 = 1 \quad \text{dan} \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}\ , \ n > 1.$$

(i) Tunjukkan $|x_n| \le 3$.

(ii) Tunjukkan (x_n) adalah menokok.

(iii) Tunjukkan (x_n) menumpu dan dapatkan had jujukan (x_n).

(100/100)

4. (a) Tunjukkan $\lim\limits_{x \to 0} \sin \left(\frac{1}{x^2} \right)$ tak wujud.

(b) Andaikan $f : N \longrightarrow N$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in Q^P \\ 0 & x \in Q \end{cases}$$

(i) Tunjukkan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(ii) Tunjukkan $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tak wujud jika $a \neq 0$.

(c) Andaikan f fungsi selanjar pada N. Untuk setiap integer positif n, letakkan

$$A_n = \{ x \in N : f(x) = n \}.$$

Buktikan bahawa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ adalah tertutup.

.../3

(d) Andaikan $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ sebagai fungsi selanjar dengan $f(a) = c$, $f(b) = d$, $a > c$ dan $d > b$. Tunjukkan bahawa wujud suatu nombor x pada $[a,b]$ dengan $f(x) = x$.

(100/100)

- ooo000ooo -