

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT201 - Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

2

Jawab mana-mana LIMA (5) soalan.

1. (a) Lakarkan $r = a(1 - \cos \theta)$ bagi $\theta \in [0, 2\pi]$, di mana a adalah suatu pemalar. Cari luas yang terkandung di dalam graf tertutup dan panjang lengkung.

(b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

(c) Cari selang penumpuan bagi siri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$.

(d) Jika suatu jujukan a_n memenuhi syarat $a_{n+1} \geq a_n$ untuk semua n dan $a_n \leq M$ untuk suatu M , maka a_n menumpu ke suatu limit ℓ .

(100/100)

2. (a) Jika $PV - RT = 0$ dengan R sebagai suatu pemalar cari $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ dan $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$.

Seterusnya buktikan bahawa

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1.$$

.../2

- (b) Anggarkan dengan menggunakan pembeza seluruh

$$\sqrt[5]{(3.9)^2 + (2.1)^4} .$$

- (c) Jika $w = \exp(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, $x = 2r + s$, $y = r - s$, $z = r^2 + s^2$ cari $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_s$ dan $\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_r$.

Andaikan $r = 1$, $s = 1$.

Jika $\Delta r = 0.1$, $\Delta s = -0.1$, cari Δw .

- (d) Dengan menggunakan konsep ϵ - δ , buktikan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4 + n} = 2 .$$

(100/100)

3. (a) Jika $u^2 + y - v^2 + 6 = 0$ dan $uv + x^2 + 1 = 0$ cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ dan $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$.

- (b) Katakan dua persamaan serentak berikut

$$F(x, y, z, u, v) = 0$$

$$G(x, y, z, u, v) = 0$$

mentakrifkan $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, tuliskan rumus bagi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} \text{ dan } \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z} .$$

Seterusnya cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z}$ dan $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x,z}$ jika

$$x + 3y + 2z - u - 2v - 9 = 0 ,$$

$$\text{dan } x^2 + 3y^2 - z^2 + e^u - e^{2v} + 1 = 0 .$$

- (c) Kelaskan titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$$

dan cari nilai ekstremum tempatan jika wujud.

.../3

(d) Adakah siri berikut menumpu?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Jika menumpu, cari nilainya.

(100/100)

4. (a) Tentukan sama ada kamiran

$$\int_{-\infty}^1 xe^x dx$$

menumpu atau mencapah. Jika menumpu, cari nilainya.

Adakah $\int_{-\infty}^1 xe^{x^2} dx$ menumpu dan apakah nilainya jika ia menumpu.

(b) Dapatkan polinomial Taylor darjah 3 bagi $f(x) = \ln(1+x)$ berpusat pada $x = 0$. Seterusnya dapatkan polinomial Taylor darjah n dan berikan ralatnya.

Dapatkan siri Taylor bagi fungsi ini dan berikan selang penumpuannya dengan alasan.

Berikan siri Taylor bagi $g(x) = \ln(1-x)$ dan $h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Cari nilai hampiran bagi $\ln 4$.

(c) Fungsi e^x boleh dikembangkan dalam bentuk

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Andaikan $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ tidak boleh dinilai dalam bentuk

analytik. Gunakan hasil di atas dengan 6 sebutan yang pertama untuk mencari nilai hampiran bagi

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Carikan juga ralatnya.

.../4

Dapatkan $\int_0^1 e^{-x^2}$ dalam bentuk siri tak terhingga, dengan memberi alasan.

(d) Tunjukkan bahawa

$$u = \frac{x^2 y^2}{x + y} \text{ memenuhi persamaan } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u .$$

(100/100)

5. (a) Cari nilai $\iiint_D (2x - y - z) dx dy dz$ yang mana

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

(b) Lakarkan rantau kamiran dan seterusnya nilaikan kamiran berikut.

(i) $\int_0^1 \int_{x^3}^x (2x + 3y) dy dx$

(ii) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

(c) Cari isipadu bongkah yang dibatasi oleh permukaan $z^2 = 4 - x - y$ dan satah-satah koordinat $x = 0, y = 0, z = 0$.

(d) Nilaikan had-had berikut

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2^n}$

(ii) $\frac{n \ln n}{e^n}$

(100/100)

6. (a) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau mencapah. Jika menumpu cari nilainya

(i) $\int_0^1 x^2 \ln x dx$

(ii) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$

.../5

(b) Biarkan

$$u = f(x, y) .$$

Tunjukkan bahwa melalui

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$\text{kita dapati } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 .$$

(c) Dengan penggantian $x + y = u$, $y = uv$, atau secara lain, tunjukkan bahwa

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx = \frac{e - 1}{2} .$$

(100/100)

- .ooo00ooo -