

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA  
Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1990/91

Jun 1991

MAT 201 - KALKULUS LANJUTAN

Masa : [ 3 jam ]

---

Jawab semua soalan.

1. (a) Katakan

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left[ \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{y}\right) \right], & \text{jika } x \neq 0 \text{ dan } y \neq 0 \\ 0, & \text{jika } x = 0 \text{ atau } y = 0 \end{cases}$$

Tentukan sama ada  $f$  selanjar pada  $(0, 0)$ .

(20/100)

(b) Diberi

$$\text{had}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)} - 1}{2x^2 + 3y^2}$$

wujud. Carilah nilai had ini.

(20/100)

(c) Diberi

$$z = u(x, y) e^{ax+by} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Cari nilai  $a$  dan  $b$  supaya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

(20/100)

.../2

(d) Katakan

$$z = x^2 + 2y^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Tunjukkan bahwa

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta = 2x (1 + 2 \tan^2 \theta),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x = 4 r^2 \tan \theta$$

(20/100)

(e) Jika  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$  yang  $u = \phi(r, s)$  dan  $v = \psi(r, s)$ , buktikan bahwa

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}$$

(20/100)

2. (a) Transformasikan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dengan menggunakan penggantian

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(30/100)

(b) Cari titik-titik genting terhingga bagi fungsi

$$f(x, y) = c^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{12} (x + y)^3,$$

di sini  $c > 0$ . Tentukan jenis titik-titik ini.

(30/100)

(c) Cari nilai  $z$  yang terbesar yang memenuhi

$$2x + 4y = 5,$$

$$x^2 + z^2 = 2y.$$

(20/100)

.../3

(d) Cari nilai maksimum dan minimum bagi fungsi

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

pada set

$$D = \{ (x, y) \mid (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 1 \}$$

(20/100)

3. (a) Nilaikan kamiran-kamiran berikut :

(i)  $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$

D adalah suatu segitiga yang berbucu pada (1, 0), (3, 0), (2, 1).

(ii)  $\int_0^1 \int_t^1 e^{s^2} \, ds \, dt$

(40/100)

(b) Nilaikan kamiran dengan menggunakan penggantian

$$x = \frac{1}{2}(r - s), \quad y = \frac{1}{2}(r + s).$$

$$\int_0^{1/2} \int_x^{1-x} \left( \frac{x-y}{x+y} \right)^2 \, dy \, dx$$

(20/100)

(c) Cari nilai had-had berikut :

(i)  $\text{had}_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{n^2 + n} - n \right],$

(ii)  $\text{had}_{n \rightarrow \infty} n (\ln n).$

(20/100)

(d) Cari nilai siri-siri berikut :

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-1)(9n+8)},$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{3} \right)^{n+2}.$

(20/100)

4. (a) Cari nilai kamiran

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{3^n} \right] dx$$

(15/100)

(b) Ujikan penumpuan siri-siri berikut :

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)}{n^n}$$

(25/100)

(c) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} (x + 1)^n$$

(15/100)

(d) Tunjukkan

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

menumpu secara bersyarat.

(15/100)

(e) Ujikan penumpuan kamiran-kamiran berikut :

$$(i) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} dx,$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

(30/100)

ooo00ooo