

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1989/90
Jun 1990

MAT 201 - Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

Jawab EMPAT (4) soalan.

1. (a) (i) Lakarkan lengkung berikut

$$r = 2 + 4 \sin \theta$$

- (ii) Cari luas kawasan yang berada dalam gelung yang kecil bagi lengkung $r = 2 + 4 \sin \theta$.

(30/100)

- (b) (i) Cari had yang berikut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{5n^2 - 4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - n$$

- (ii) Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 5^n + 20}{9(n!) + 7(5^n)}$

[Petunjuk : Pertimbangkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!}$]

(30/100)

- (c) (i) Tunjukkan bahawa siri Maclaurin bagi fungsi $\cos x$ adalah

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

...2/

(ii) Dengan menggunakan (i), cari siri Maclaurin bagi fungsi $g(x) = x^6 \cos 2x$.

(iii) Dengan pertolongan (ii), cari $g^{(8)}(0)$.

(iv) Lengkung $y = \cos x$ dianggarkan dengan parabola $x^2 = 2(1 - y)$ pada selang $[-0.2, 0.2]$. Anggarkan beza yang terbesar di antara koordinat y kedua-dua lengkung ini pada selang tersebut.

(40/100)

2. (a) Cari selang penumpuan bagi siri kuasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{3n^2 + 1}$$

(25/100)

(b) Diberi $f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12x - 24y$. Cari titik genting dan ekstremum tempatannya.

(20/100)

(c) Diberi $z = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \neq 0$ dan z memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(i) Cari $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dalam sebutan x, y dan $\frac{dz}{dr}$.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$r \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{dz}{dr} = 0$$

(25/100)

...3/

(d) Diberi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + a_n)$, $n \geq 1$.

(i) Tunjukkan bahwa jujukan $\{a_n\}$ adalah terbatas dan menyusut ekanada.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ wujud. Nyatakan mengapa dan cari had ini.

(30/100)

3. (a) $V = (x - at)^4 + \cos(x + at)$, di mana a adalah suatu pemalar. Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

(20/100)

(b) Diberi sistem persamaan

$$x^2y - 3v^2 + e^{w-v} = 0$$

$$w^3 + x^3 + e^{2y} - v^2 = 3$$

Cari $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$

(25/100)

(c) Hasil persilangan di antara satah $x + y + z = 12$ dan paraboloid $z = x^2 + y^2$ ialah suatu elips. Cari titik yang tertinggi dan titik yang terendah bagi elips ini.

(30/100)

(d) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_1^{\infty} \frac{\cosh x}{1 + \sinh x} dx$

...4/

$$(ii) \int_1^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} + \cos x}{e^{\sqrt{x}}} dx$$

(25/100)

4. (a) (i) Nyatakan petua Leibnitz bagi terbitan

$$\frac{d}{dr} \int_c^d f(x, r) dx$$

(ii) Dengan menggunakan persamaan

$$\int_0^1 x^r dx = \frac{1}{r+1}, \text{ di mana } r > -1$$

dan petua Leibnitz, tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 x^r \ln x dx = \frac{-1}{(r+1)^2}$$

(iii) Dengan (ii), nilaikan $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

(25/100)

(b) Tentukan sama ada siri yang berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2+n} \right)^n$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4 - 3n + 2}$$

...5/

(iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}^2 n}{n}$$

(30/100)

(c) Cari jumlah siri

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

(20/100)

(d) Bagi fungsi $f(x, y)$ yang di bawah, tentukan sama ada $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud atau tidak, dan cari had jika wujud.

(i)
$$f(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$$

(ii)
$$f(x, y) = \frac{x(x^2 + 2xy - 3y^2)}{\sin(x+3y) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

(25/100)

5. (a) (i) Cari nilai kamiran yang berikut :

$$\iint_A x^2 y \, dx dy$$

di mana A adalah kawasan yang dibatasi oleh paksi x, paksi y, garis $x = 1$ dan lengkung $y = x^3 + 1$.

...6/

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}} \, dx \, dy$$

(ii) G adalah suatu bongkah yang dibatasi dari atas oleh sfera $\rho = a$ ($a > 0$) dan dari bawah oleh kon $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Nyatakan (tanpa menilaikannya)

$$\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dx \, dy \, dz$$

sebagai kamiran terlelar dalam koordinat sfera dan dalam koordinat silinder.

Cari nilai $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dx \, dy \, dz$.

(70/100)

(b) Cari fungsi yang mewakili siri kuasa

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots$$

(30/100)