UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAT114 - Linear Algebra

Masa: [3 jam]

Jawab EMPAT soalan. Soalan SATU adalah WAJIB.

1. (a) Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

cari

(i) $|A|$

(ii) A^{-1}

(iii) $(\text{adj } A)A$

(iv) Persamaan cirian bagi A

(v) $A^4 - 3A^3 + 3A^2 - A$

(vii) Nilai eigen bagi $(\text{adj } A)A$

(viii) Vektor eigen bagi $(\text{adj } A)A$

(ix) Nilai eigen bagi A^2

(32/100)

(b) Katakan $S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \; a \geq b \geq c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Tentukan samada S subruang $\mathbb{R}^3$ atau tidak.

(12/100)

(c) Jika $W = \left\{ \underline{w} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$

Cari dimensi W.

(16/100)

(d) Katakan A matriks nxn. Tunjukkan bahawa polinomial cirian bagi A, $P_A(\lambda)$, sama dengan polinomial cirian bagi A^T.

(25/100)

(e) Tentukan samada subset $\mathbb{R}^3$ berikut bersandar linear atau tidak.

$$S = \{[2 \quad 1 \quad 0]^T, \ [1 \quad 0 \quad 1]^T, \ [0 \quad 1 \quad 2]^T\}.$$

Bolehkah $[\sqrt{2} \quad 3 \quad \pi^2]^T$ ditulis sebagai gabungan linear vektor-vektor dari S.

(15/100)

2. (a) Diberikan

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(i) Cari ruang penyelesaian untuk sistem ini.

(ii) Dapatkan set yang merentang ruang penyelesaian sistem ini.

(iii) Cari dimensi ruang penyelesaian.

(35/100)

(b) Buktikan bahawa $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ adalah bersandar linear jika dan hanya jika suatu vektor $\underline{v}_j \in S$ boleh dituliskan sebagai gabungan linear vektor-vektor lain dari S.

(40/100)

(c) Cari nilai x supaya matriks A singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 7-x^2 \end{bmatrix}$$

(25/100)

.../3

3. (a) Jika U suatu subruang dari ruang vektor V, $U = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ tunjukkan bahawa U mengandungi subruang yang direntang oleh $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$.

(25/100)

(b) Dapatkan asas untuk ruang vektor V yang direntang oleh $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5\}$ dengan

$$\underline{u}_1 = x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$\underline{u}_2 = x^3 - 3x + 1$$

$$\underline{u}_3 = x^2 + x + 2$$

$$\underline{u}_4 = x + 1$$

$$\underline{u}_5 = x^3 + 1$$

(25/100)

(c) Tunjukkan bahawa $|A| = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}$ jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}_{n \times n}$$

(30/100)

(d) Nyatakan samada pernyataan-pernyataan berikut benar atau salah. Beri alasan untuk jawapan anda.

(i) Jika A matriks nxn, maka $|rA| = r|A|$.

(ii) Adakah mungkin suatu sistem persamaan homogen dengan 15 persamaan dan 12 anu mempunyai penyelesaian yang unik.

(iii) Jika T set matriks 2x2 yang simetrik, maka dimensi T ialah tiga.

(iv) Setiap ruang vektor mempunyai asas yang terhingga.

(20/100)

4. (a) Tentukan samada $P_2(x)$ boleh direntang oleh $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ dengan

$$p_1(x) = 1 + 2x - x^2$$
$$p_2(x) = 3 + x^2$$
$$p_3(x) = 5 + 4x - x^2$$
$$p_4(x) = -2 + 2x - 2x^2.$$

(30/100)

(b) Dapatkan nilai λ supaya sistem berikut mempunyai penyelesaian yang tak remeh.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= \lambda x \\ 2x + 3y + 2z &= \lambda y \\ x + y + 2z &= \lambda z. \end{aligned}$$

(20/100)

(c) Diberi A_{nxn}. Jika $|A| = 0$, tunjukkan $|\text{adj } A| = 0$

(30/100)

(d) Diberikan $M = \{[x\ y\ z]^T \mid x = z\}$. Tunjukkan M adalah subruang $\mathbb{R}^3$. Dapatkan suatu asas untuk $\mathbb{R}^3$ yang mengandungi asas M.

(20/100)

5. (a) Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Cari polinomial cirian untuk A.

(ii) Nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen matriks A.

(iii) Jika mungkin dapatkan suatu matriks P yang tak singular supaya $P^{-1}AP = D$ suatu matriks pepenjuru.

(40/100)

.../5

(b) Jika CS(A) adalah ruang lajur untuk matriks A dan N(B) mewakili ruang nol bagi matriks B. Cari matriks B supaya N(B) = CS(A) jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(30/100)

(c) Jika $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ adalah set vektor dari ruang vektor V dengan $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$ dan $\underline{u}_{j+1} \notin \mathrm{SPAN}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_j\}$ untuk $j = 1, 2, \ldots k-1$, tunjukkan bahawa $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ adalah tak bersandar linear.

(30/100)

- oooOOooo -