UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

MAT114 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Cari X di mana

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} .$$

(20/100)

(b) Kalau

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tak singular, apakah songsangnya?

(15/100)

(c) Selesaikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} 3a + b + 7c + 9d &= 4 , \\ a + b + 4c + 4d &= 7 , \\ -a - 2c - 3d &= 0 , \\ -2a - b - 4c - 6d &= 6 . \end{aligned}$$

(20/100)

(d) Jika $C^2 = C$ dan $C \neq I$, tentukan jenis penyelesaian bagi sistem persamaan $CX = \tilde{0}$.

(15/100)

(e) Katakan A, B $\in M_{nxn}$. Buktikan atau sangkalkan

(i) $r(A+B) = r(A) + r(B)$

(ii) $r(AB) = r(A)r(B)$

(iii) Jika B tak singular, maka $r(BA) = r(A)$.

(30/100)

2. (a) Jika $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 2^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-2)(c-2)(c-b)$,

cari nilai $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2+b & 2^2 & c \\ 2^2+b^2 & 2^3 & c^2 \end{vmatrix}$

dengan menggunakan sifat-sifat penentu (tanpa mengembangkannya).

(15/100)

(b) Katakan x, y $\in M_{3X1}$. Tunjukkan

$$\det(I - xy^T) = 1 - x^Ty .$$

(20/100)

(c) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} \text{kos } \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \text{kos } \theta \end{bmatrix} .$$

Dapatkan A^{-1} dengan menggunakan:

(i) takrif (ii) kaedah adjoin (iii) b.e.b.t.

(30/100)

(d) Katakan $A \in M_{4x4}$ dan $|A| = 8$. Carilah

(i) $|(A^T)^{-1}|$ (ii) $|adj(5A)|$

(iii) $|(adj\ A)A|$ (iv) $r(A)$

(v) nilaieigen bagi $[(adj\ A)A]^3$.

(20/100)

(e) Jika $A^5 + A^4 + 2A^3 - 4I = \tilde{0}$, tunjukkan bahawa A tak singular.

(15/100)

3. (a) (i) Tunjukkan bahawa

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \\ -x + 3y \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in R \right\}$$

adalah suatu subruang dari R^3.

(ii) Carilah dimensi dan suatu asas bagi S.

(iii) Jika $T = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, cari suatu asas bagi $(S \cap T)$.

(30/100)

(b) Katakan V adalah suatu ruang vektor berdimensi n. Jika $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_r\} \subset V$ adalah tak bersandar linear dan $r < n$. Buktikan bahawa wujud suatu $T = \{\underline{v}_{r+1}, \underline{v}_{r+2}, \ldots, \underline{v}_n\} \subset V$ yang menyebabkan $S \cup T$ menjadi suatu asas bagi V.

(20/100)

(c) (i) Tunjukkan bahawa

$$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a \in R,\ b \in R,\ i^2 = -1\}$$

dengan dua operasi

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$
$$\alpha(a+ib) = (\alpha a) + i(\alpha b), \qquad \alpha \in R$$

membentuk suatu ruang vektor.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$S = \{a+ib,\ c+id\}$$

adalah suatu asas bagi $\mathbb{C}$ jika dan hanya jika $ad - bc \neq 0$.

(30/100)

(d) Katakan V adalah suatu ruang vektor. Jika

$$v_i \in V \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad r_i \in R \quad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

dan

$$\{v_2 + r_2v_1,\ v_3 + r_3v_1,\ \ldots,\ v_m + r_mv_1\}$$

bersandar secara linear, tunjukkan bahawa

$$\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m\}$$

juga bersandar secara linear.

(20/100)

4. (a) Katakan A, B, C $\in M_{nxn}$. Jika A serupa dengan B dan B serupa dengan C, tunjukkan bahawa C serupa dengan A.

(20/100)

(b) Tentukan sama ada

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & -3 \\ 6 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

terperpenjurukan. Jika boleh, cari matriks tak singular P dan suatu matriks pepenjuru D sedemikian

$$P^{-1}AP = D.$$

(25/100)

(c) Cari semua nilaieigen bagi A^5 jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(10/100)

(d) Tunjukkan bahawa

$$V = \{A \in M_{nxn} \mid A^T = A\}$$

adalah suatu subruang dari M_{nxn}. Dapatkan dim(V).

(30/100)

(e) Katakan A dan B adalah matriks tak singular. Buktikan bahawa AB dan BA mempunyai nilaieigen yang sama.

(15/100)

- oooOOooo -