

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1989/90

Mac/April 1990

MAT114 -Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

Jawab **EMPAT** soalan.

1. (a) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(i) Cari A^{-1} , $|A|$, $|AA^T|$ dan $\text{adj } A$.

(ii) Tuliskan A sebagai hasil darab matriks-matriks baris permulaan.

(50/100)

(b) Katakan $A=(a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$. Surihan matriks yang ditandakan oleh $\text{Tr}(A)$, ditakrifkan sebagai hasil tambah kesemua unsur di atas pepenjuru utama A , iaitu

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

(i) Jika B dan C adalah matriks segiempat sama, buktikan bahawa

$$\text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB)$$

(ii) Jika B , C , P adalah matriks segiempat sama, dan $B = P^{-1}CP$, buktikan bahawa

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(C)$$

(30/100)

..... /2

(c) Katakan A adalah suatu matriks terpepenjurunan. Jika A tak singular, tunjukkan bahawa A^{-1} juga terpepenjurunan.

(20/100)

2. (a) Jika A adalah matriks tak singular, buktikan bahawa $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(20/100)

(b) Diberi sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 &= 1 \end{aligned}$$

Tentukan nilai k jika sistem di atas

- (i) tak konsisten
- (ii) mempunyai penyelesaian unik
- (iii) mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya.

(30/100)

(c) Diberi

$$\begin{aligned} \underline{u} &= t^3 - 4t^2 + 2t + 3, \quad \underline{v} = t^3 + 2t^2 + 4t - 1, \\ \underline{w} &= 2t^3 - 2t^2 - 4t + 5 \end{aligned}$$

Tentukan sama ada $\{ \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \}$ bersandar linear atau tidak.

(30/100)

..... /3

- (d) Jika A dan B adalah matriks segiempat sama, tunjukkan bahawa AB dan BA mempunyai nilai-nilai eigen yang sama.

(20/100)

3. (a) Katakan W adalah ruang vektor yang direntang oleh

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Tentukan suatu subset dari V yang boleh dijadikan asas bagi W . Apakah dimensi W ?

(30/100)

- (b) Katakan V adalah ruang vektor bagi semua matriks $n \times n$ atas \mathbb{R} , dan

$$W = \{ A \mid A \in V, A^T = TA \text{ bagi suatu matriks tetap } T \in V \}$$

Tunjukkan bahawa W adalah subruang dari V .

(30/100)

- (c) Jika $f(\mu) = |A - \mu I|$ adalah polinomial cirian untuk matriks simetri pencong A yang berperingkat n , tunjukkan bahawa polinomial cirian untuk A^2 , $g(\mu) = |A^2 - \mu I|$, ialah

$$g(\mu) = (-1)^n [f(\sqrt{\mu})]^2$$

(20/100)

..... /4

(d) Tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & w \end{vmatrix} = -x(x-y)(y-z)(z-w)$$

(20/100)

4. (a) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (i) Cari polinomial cirian untuk A.
- (ii) Cari nilai-nilai eigen bagi A.
- (iii) Cari vektor-vektor eigen bagi A.
- (iv) Cari matriks tak singular P dan matriks pepenjuru D supaya
$$P^{-1}AP = D$$
- (v) Cari nilai-nilai eigen bagi A^n , n suatu integer positif.

(50/100)

(b) Jika matriks A setara baris dengan matriks B, buktikan bahawa A dan B mempunyai ruang baris yang sama.

(30/100)

..... /5

- (c) Jika $\underline{v} = (4, -3, 2)$, tentukan vektor koordinat bagi \underline{v} terhadap asas

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

dari \mathbb{R}^3 .

(20/100)

5. (a) Tentukan ruang nol bagi matriks yang berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Apakah dimensi ruang nol bagi A ?

(25/100)

- (b) Jika

$$U = \text{SPAN}\{(1, 0, -1, 1), (2, 3, 0, 1), (3, 3, -1, 2)\}$$

$$V = \text{SPAN}\{(2, 2, -2, 1), (3, 2, -3, 2), (3, 4, -3, 1)\}$$

Tentukan

(i) dimensi $U + V$

(ii) dimensi $U \cap V$

(30/100)

- (c) Jika U dan W adalah subruang dari ruang vektor V , buktikan bahawa $U \cap W$ adalah subruang dari V .

(25/100)

..... /6

- (d) Jika μ adalah suatu nilai eigen bagi matriks tak singular A , tunjukkan bahawa μ^{-1} adalah nilai eigen bagi A^{-1} .

(20/100)

- ooo00ooo -