UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1989/90

Jun 1990

MAT 114 - Aljabar Linear

Masa : [3 jam]

Jawab mana-mana EMPAT soalan.

1. (a) Katakan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jika n ialah integer positif dan

$$A^n = \begin{bmatrix} f(n) & g(n) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Cari $f(n)$ dan $g(n)$.

(20/100)

(b) Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$x + y + z + u + v = 3$$

$$2x + 3y + 3z + u - v = 0$$

$$-x + 2y - 5z + 2u - v = 1$$

$$3x - y + 2z - 3u - 2v = -1$$

(30/100)

(c) Cari syarat-syarat atas a, b dan c supaya sistem persamaan berikut adalah konsisten.

(i) $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 3x - y + 2z &= b \\ x - 5y + 8z &= c \end{aligned}$$

...2/

(ii) $x + y + z = 1$

$x + ay + bz = c$

$x + a^2y + b^2z = c^2$

(50/100)

2. (a) Katakan A dan B ialah matriks n x n.

Buktikan

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(AB)^T = B^TA^T$

(iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, jika A tak singular.

(30/100)

(b) Cari songsang bagi matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(20/100)

(c) Turunkan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ke bentuk eselon baris terturun.

(20/100)

...3/

(d) Cari syarat-syarat atas a, b dan c supaya matriks berikut adalah singular.

$$\begin{bmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{bmatrix}$$

(30/100)

3. (a) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Cari

(i) $|A|$

(ii) adj(A)

(iii) $|\ A\ \mathrm{adj}(A)\ |$

(iv) $E_3^2(4)\ E_2^1\ E_2(5)\ A$

(v) $|\ E_3^2(4)\ E_2^1\ E_2(5)\ A\ |$

(30/100)

(b) Jika $a \neq 0$, nilaikan penentu-penentu berikut :

(i) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}$

(30/100)

...4/

(c) Katakan B ialah matriks n x n berikut

$$B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

dengan $0 < \theta < \pi$

Tunjukkan bahawa $|B| = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

(40/100)

4\. (a) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cari suatu matriks P yang tak singular supaya $P^{-1}AP$ adalah matriks pepenjuru.

(40/100)

(b) Katakan $A = [a_{ij}]$ ialah suatu matriks 3 x 3.

(i) Cari hasildarab bagi semua nilai eigen bagi A.

(ii) Cari hasiltambah bagi semua nilai eigen bagi A.

(40/100)

...5/

(c) Tentukan sama ada matriks berikut terpepenjurukan atau tidak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad a \neq 0$$

(20/100)

5. (a) Jika vektor u_1, u_2, u_3 tak bersandar linear dan $v_3 = 2u_1 + 3u_2 + 4u_3$ tentukan sama ada u_1, u_2, v_3 bersandar linear atau tidak.

(30/100)

(b) Katakan A ialah matriks n x n yang simetri. Katakan λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) ialah nilai eigen bagi A dan v_1, v_2 ialah vektor eigen yang sepadan dengan λ_1 , λ_2 masing-masing. Nilaikan $v_1^T v_2$.

(30/100)

(c) Katakan U ialah subruang yang dijanakan oleh vektor $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 0)$, dan $u_3 = (2, 3, 3, -1)$ dan V ialah subruang berikut :

$V = \{ (a, b, c, d) : b + c + d = 0 \}$

Cari suatu asas bagi

(i) U

(ii) V

(iii) $U \cap V$

(iv) $U + V$

- oooOOooo -