

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang 1988/89

Mac/April 1989

MAT114 - Algebra Linear

Masa: [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Pertimbangkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

(i) Cari matriks baris permulaan E_1 dan E_2 supaya $E_1 E_2 A = I_2$.

(ii) Tuliskan A sebagai hasil darab dua matriks baris permulaan.

(20/100)

(b) Katakan matriks B diperolehi dari matriks A dengan cara berikut

$$A \xrightarrow{R_2^1(-2)} A_1 \xrightarrow{R_3(\frac{1}{3})} A_2 \xrightarrow{R_5^4} A_3 \xrightarrow{R_4^1(-3)} B.$$

Jika $|A_1| = 5$, dapatkan $|A_2|$ dan $|B|$.

(15/100)

(c) Jika A matriks $n \times n$, $A \neq \tilde{O}$ dan $A^T = \lambda A$, maka tunjukkan $\lambda = \pm 1$.

(15/100)

(d) Cari nilai-nilai λ supaya sistem persamaan homogen

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 0 \\ x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

mempunyai penyelesaian tak remeh.

(20/100)

.../2

(e) Cari persamaan polinomial kubik $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ yang melalui titik-titik $(-1, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ dan $(3, 16)$.

(30/100)

2. (a) Katakan

$$Q = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix},$$

(i) cari $|Q|$, $|Q^T|$ dan $|QQ^T|$.

(ii) Dengan hasil-hasil dari (i), tunjukkan

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

(20/100)

(b) Tunjukkan

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & -1 & x & \dots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & (\alpha_{n-1}+x) \end{vmatrix} = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

(40/100)

(c) Katakan $f(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$ adalah polinomial cirian untuk matriks A, cari

- (i) $|A|$
- (ii) $|(A^T)^{-1}|$
- (iii) $|\text{adj } 5A|$
- (iv) $|A \text{ adj } A|$.

(20/100)

- (d) Jika A dan B matriks simetri yang tak singular dengan $AB = BA$, tunjukkan $A^{-1}B^{-1}$ simetri.

(20/100)

3. (a) Tunjukkan sama ada subset-subset dari \mathbb{R}^3 merupakan suatu subruang atau tidak.

$$(i) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 3y = 0 \text{ dan } y + z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(ii) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 3, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

(25/100)

- (b) Katakan V ruang vektor, H dan K adalah subruang-subruang V. Tunjukkan set

$$H + K = \{ \underline{x} \mid \underline{x} = \underline{h} + \underline{k}, \quad \underline{h} \in H \text{ dan } \underline{k} \in K \}$$

adalah subruang V.

(30/100)

- (c) Tentukan sama ada set $S = \{x^3 - 2x + 1, 4x^2 - x + 3, 3x - 2\}$ merentangi $P_3(x)$ set polinomial darjah ≤ 3 .

(25/100)

- (d) Cari nilai-nilai λ supaya set

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

membentuk suatu asas untuk \mathbb{R}^3 .

(20/100)

.../4

4. (a) Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- (i) Cari polinomial cirian untuk A.
- (ii) Cari nilai eigen dan vektor eigen yang sepadan untuk matriks A.
- (iii) Tunjukkan A terpepenjuru dan dapatkan matriks pepenjuru tersebut.

(40/100)

(b) (i) Dapatkan suatu asas untuk ruang penyelesaian sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

- (ii) Nyatakan dimensi ruang penyelesaian tersebut.

(30/100)

(c) Suatu matriks N dikatakan nilpoten jika untuk suatu k integer positif, $N^k = \bar{0}$. Tunjukkan matriks nilpoten adalah singular.

(30/100)

5. (a) Nyatakan sama ada pernyataan berikut benar atau salah. Beri alasan.

- (i) Setiap ruang vektor mempunyai asas yang terhingga.
- (ii) Jika T set matriks simetri peringkat 2 x 2, dimensi T ialah 3.
- (iii) Subset dari set yang bersandar linear adalah bersandar linear juga.

(24/100)

(b) Jika x_1, x_2, \dots, x_n adalah vektor yang tak bersandar linear dari ruang vektor V dan jika $x \notin \text{Sp}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tunjukkan $\{x_1 + x, x_2 + x, \dots, x_n + x\}$ adalah tak bersandar linear di dalam V.

(30/100)

- (c) Katakan A matriks $n \times n$ yang tak singular. $f_A(\lambda)$ adalah polinomial cirian untuk A . Tunjukkan bahwa polinomial cirian untuk A^{-1} ialah

$$f_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{1}{|A|} (-\lambda)^n f_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

(30/100)

- (d) Kalau $|A - I_4| = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$, adakah A terpepenjuru? Beri alasan.

(16/100)

- ooo00ooo -