UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1990/91

Jun 1991

MAT 114 - ALJABAR LINEAR

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Diberi sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} -x + 2y + 3z &= 1 \\ 2kx + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 2k \end{aligned}$$

Tentukan nilai k jika sistem di atas

(i) mempunyai penyelesaian unik
(ii) mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya
(iii) tak konsisten

(30/100)

(b) Jika

$$V = \text{SPAN } \{(1, 1, 3, 0), (-1, 3, 3, 2), (-1, 1, 0, 1)\}$$
$$W = \text{SPAN } \{(-3, 3, 2, 2), (-2, 2, 2, 1), (-1, 1, 2, 0)\}$$

tentukan (i) Dimensi $V + W$
(ii) Dimensi $V \cap W$

(40/100)

(c) Tentukan ruang nol bagi matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(30/100)

.../2

2. (a) Diberi

$$\underset{\sim}{u}_2 = 2t^3 + t^2 + 1$$
$$\underset{\sim}{u}_2 = 3\,t^3 + t^2 + t + 2$$
$$\underset{\sim}{u}_3 = 11t^3 + 5t^2 + t + 6$$
$$\underset{\sim}{u}_4 = t^3 + t^2 - t$$

tentukan sama ada $\{ \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3, \underset{\sim}{u}_4 \}$ bersandar secara linear

(30/100)

(b) Tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y & x & y & y & y \\ y & y & x & y & y \\ y & y & y & x & y \\ y & y & y & y & x \end{vmatrix} = (x + 4y)\ (x - y)^4$$

(20/100)

(c) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) Cari polinomial cirian dari A
(ii) Cari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari A
(iii) Cari matriks tak singular P dan matriks pepenjuru D supaya

$$P^{-1}AP = D$$

(50/100)

3. (a) Jika A adalah suatu matriks segiempat sama dan $A^5 = 0$, tunjukkan bahawa

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4$$

(20/100)

(b) Katakan V adalah ruang vektor bagi semua matriks n x n atas $\mathbb{R}$, dan

$$W = \{ A \mid A \in V \ ;\ PA \text{ suatu matriks pepenjuru bagi suatu matriks tetap } P \in V \}$$

Buktikan bahawa W adalah subruang dari V

(30/100)

.../2

(c) Diberi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Cari A^{-1}, $|A|$, adj A, adj (adj A)
(ii) Tuliskan A sebagai hasil darab matriks-matriks baris permulaan.

(50/100)

4\. (a) Tentukan sama ada subset berikut subruang dari $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha\beta\gamma = 0 \;;\; \alpha,\ \beta,\ \gamma\ \varepsilon\ \mathbb{R} \right\}$$

(20/100)

(b) Tentukan sama ada set berikut merupakan asas untuk set polinomial berdarjah 2

$$\{\ 4x^2 - x + 2,\quad 6x^2 + 4x + 1,\quad 3x^2 - 5x\ \}$$

(20/100)

(c) Katakan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dapatkan (i) Dimensi ruang lajur dari A
(ii) Dimensi ruang nol bagi A

(30/100)

(d) Jika λ adalah suatu nilai eigen bagi matriks A dan n suatu integer positif, tunjukkan bahawa λ^n adalah nilai eigen bagi matriks A^n.

(30/100)

5\. (a) Diberi A, B, C adalah matriks n x n, buktikan

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

(20/100)

.../4

(b) Jika

$$-3\underset{\sim}{u}_1 + \underset{\sim}{u}_2 + 4\underset{\sim}{u}_3 + 2\underset{\sim}{u}_4 = \underset{\sim}{0}$$

tunjukkan bahawa

$$\text{SPAN } \{ \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3, \underset{\sim}{u}_4 \} = \text{SPAN } \{ \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2, \underset{\sim}{u}_3 \}$$

(20/100)

(c) Katakan A adalah suatu matriks segiempat sama, buktikan

(i) A tak singular jika dan hanya jika $|A| \neq 0$
(ii) 0 adalah suatu nilai eigen bagi A jika A singular

(30/100)

(d) Jika U dan W adalah subruang dari ruang vektor V, buktikan bahawa

$$U + W = \{ \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{w} \mid \underset{\sim}{u} \in U \, ; \, \underset{\sim}{w} \in W \}$$

adalah subruang dari V.

(30/100)

- ooo000ooo -