

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

MAK110 - Kalkulus Dan Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 5 muka surat yang dicetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana EMPAT soalan. Jika calon menjawab lebih daripada empat soalan hanya empat soalan pertama mengikut susunan di dalam skrip jawapan akan diberi markah.

1. (a) Selesaikan ketaksamaan

(i) $2 < |x + 2| < 4$

(ii) $(x^2 - 1)(x + 1) \geq 0$

(20/100)

(b) Jika z_1 dan z_2 adalah nombor kompleks, tunjukkan

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(20/100)

(c) Nilaikan had-had berikut

(i) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)}{|x - 3|}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

(20/100)

(d) Cari suatu nilai hampiran bagi $\sqrt{10}$ (jitu ke 3 tempat perpuluhan),

(i) dengan menggunakan pembeza.

(ii) dengan menggunakan kaedah Newton.

(20/100)

- (e) Katakan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ berselanjur pada $x = a$ dan katakan c dan d nombor nyata. Tunjukkan bahawa fungsi $(cf + dg)(x) = cf(x) + dg(x)$ juga berselanjur pada $x = a$.

(20/100)

2. (a) Cari terbitan fungsi-fungsi berikut:

(i) $f(t) = \frac{\ln(a + bt)}{\ln(c + dt)}$

(ii) $f(t) = te^{(1/t)^2}$

(iii) $f(t) = \log_{10} 2^{t^2}$

(30/100)

- (b) Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $\sin(xy) + \cos(xy) = x$.

(10/100)

- (c) Jika f terbezakan dan jika $g(x) = kf(x)$ di mana k adalah nombor nyata, tunjukkan $g'(x) = kf'(x)$.

(10/100)

- (d) Diberi $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{jika } x \leq 1 \\ 2x - b & \text{jika } x > 1 \end{cases}$

Cari nilai a dan b supaya $f'(1)$ wujud.

(20/100)

- (e) Diberi $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

Tentukan

- (i) Selang menaik dan selang menyusut f ,
(ii) Maksimum dan minimum tempatan f ,
(iii) Selang kecekungan dan titik lengkok balas graf f ,
(iv) Asimptot graf f ,

dan kemudian lakarkan graf tersebut.

(30/100)

.../3

3. (a) Dapatkan kamiran-kamiran berikut:

(i) $\int \frac{x^2}{x^3 - 2} dx$

(ii) $\int \arctan x dx$

(iii) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

(iv) $\int \frac{(e^x - 2)e^x}{(e^x + 1)} dx$

(40/100)

(b) Cari luas kawasan yang dibendung oleh $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$,
 $x = 0$ dan $x = 1$.

(15/100)

(c) Dapatkan isipadu bungkah yang terjana apabila kawasan yang dibendung oleh

$$y = x^2 - 4x \text{ dan } y = 0$$

dikisar mengelilingi paksi-x.

(15/100)

(d) Cari dimensi segi-empat tepat yang paling luas yang dapat dimuatkan ke dalam kawasan yang dibendung oleh

$$y^2 = 4x \text{ dan } x = a. \text{ Anggap } a > 0.$$

(30/100)

4. (a) Sekiranya sistem persamaan berikut mempunyai penyelesaian yang unik, tunjukkan bahawa $abc \neq 0$. Kemudian cari nilai x , y dan z dengan menggunakan Petua Cramer.

$$\begin{aligned} bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a \end{aligned}$$

(25/100)

.../4

(b) Cari nilai-nilai λ supaya sistem persamaan berikut

(i) mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya,

(ii) tak konsisten

$$\begin{aligned} s + t - u &= 1 \\ 2s + 3t + \lambda u &= 3 \\ s + \lambda t + 3u &= 2 \end{aligned}$$

(25/100)

(c) Tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} b + c & c + a & a + b \\ b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(15/100)

(d) (i) Buktikan bahwa jika A memenuhi persamaan $A^3 + 2A^2 + 4A + 7I = \tilde{0}$ maka begitu juga A^T .

(ii) Katakan $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $n \geq 2$ dengan $a_{ij} = 1$ apabila $i \neq j$ dan $a_{ii} = 0$.

$$\text{Buktikan bahwa } |A| = \begin{cases} n - 1 & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 1 - n & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

(35/100)

5. (a) Jika $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/4 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$

(i) tunjukkan bahwa $A^{-1} = A^3$

(ii) cari A^{15} .

(20/100)

(b) Katakan

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cari

(i) adj M

- (ii) M^{-1}
- (iii) penentu M .
- (iv) $E_2(\frac{1}{2})E_2^1(-1)M$
- (v) $|\text{adj } 2M|$

(45/100)

- (c) Katakan $A \in M_{3 \times 3}$ dan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahawa $AB = BA$ jika dan hanya jika

$$A = aI + bB + cB^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(20/100)

- (d) Buktikan bahawa A tak singular jika dan hanya jika $|A| \neq 0$.

(15/100)