

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang Akademik 1990/91

Mac/April 1991

**CST202 - Kejuruteraan Sofwer**

Masa: [3 jam]

---

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 24 muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua empat soalan.

Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) (i) Berikan takrif langsung suatu fungsi bernama "warm-up" yang menerima sebagai hujah dua nombor asli  $x$  dan  $y$ , dan menentukan sama ada hasil darab dua nombor ini sama dengan tiga kali ganda hasil tambahnya.
- (ii) Berikan takrif tersirat fungsi yang sama.
- (iii) Gunakan fungsi "warm-up" dalam takrif tersirat suatu fungsi bernama "go" yang menerima tiga nombor asli  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sebagai hujah dan menentukan sama ada sekurang-kurangnya satu daripada dua hujah pertama memenuhi fungsi "warm-up" apabila dipasangkan dengan hujah ketiga.

(15/100)

...2/-

- (b) (i) Berikan takrif tersirat fungsi "semak" yang menentukan sama ada  $z$  merupakan hasil bahagi yang sah dan  $w$  merupakan baki yang sah apabila  $x$  dibahagikan oleh  $y$ , dengan  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dan  $w$  merupakan hujah-hujah nombor asli.

[Takrif ini tidak boleh merujuk kepada fungsi-fungsi lain]

- (ii) Fungsi "hasil-bahagi" pula mengirakan hasil bahagi bagi pembahagian nombor asli  $x$  oleh nombor asli  $y$ . Berikan takrif tersirat fungsi ini.

- (iii) Fungsi "gunakan\_mod" pula melaksanakan tugas yang sama seperti "hasil\_bahagi", tetapi ia merujuk kepada suatu fungsi "\_mod\_" yang mencari baki bagi pembahagian suatu nombor asli  $x$  oleh nombor asli  $y$ . Berikan takrif tersirat fungsi "gunakan\_mod" diikuti takrif langsung fungsi "\_mod\_".

- (iv) Dengan menggunakan fungsi-fungsi "\_mod\_" dan "\_div\_", berikan takrif tersirat suatu fungsi bernama "cari" yang mengirakan hasil bahagi dan juga baki dalam pembahagian suatu nombor asli  $x$  oleh nombor asli  $y$ .

- (v) Berikan takrif langsung fungsi "cari" ini, juga dengan menggunakan fungsi-fungsi "\_mod\_" dan "\_div\_".

(35/100)

- (c) Diberi takrif tersirat berikut:

$$\begin{aligned} f(x,y: \text{IN}) r: \text{IN} \\ \text{pra } x + y \geq 0 \\ \text{post } x + 3 = r + y \end{aligned}$$

berikan takrif langsung penuh (termasuk tandatangan) untuk:

- (i) fungsi pra\_f

- (ii) fungsi post\_f

...3/-

Seterusnya, diberi pula takrif langsung berikut yang didakwa melaksanakan takrif tersirat di atas:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x,y) \triangleq x - y + 3$$

(iii) Berikan tanggungjawab bukti dakwaan ini.

(iv) Buktikan dakwaan tersebut

(25/100)

(d) Persilangan set ditakrifkan oleh petua-petua berikut:

$$\text{n - d } \frac{s \in \text{set of } X}{\{\} \cap s = \{\}}$$

$$\text{n - it } \frac{e \in X, s_1, s_2 \in \text{set of } X, e \in s_2}{(e \oplus s_1) \cap s_2 = e \oplus (s_1 \cap s_2)}$$

$$\text{n - if } \frac{e \in X, s_1, s_2 \in \text{set of } X, e \notin s_1}{(e \oplus s_1) \cap s_2 = s_1 \cap s_2}$$

Buktikan teorem berikut:

$$s \in \text{set of } X \vdash s \cap \{\} = \{\}$$

(25/100)

...4/-

2. (a) (i) Berikan spesifikasi suatu operasi bernilai kebenaran bernama SEMAK yang menerima dua nombor asli  $x, y$  sebagai hujah dan berupaya membaca suatu pembolehubah luar nombor asli  $z$ . Sekiranya sekurang-kurangnya satu daripada hujah-hujahnya tidak sifar, operasi ini menyemak sama ada hasil tambah hujah-hujahnya sama dengan nilai pembolehubah luarnya.
- (ii) Suatu operasi yang diberi nama MEE menerima suatu set  $s$  yang mengandungi nombor-nombor asli sebagai hujah dan menghasilkan suatu set nombor asli juga. Sekiranya persilangan hujahnya dengan suatu pembolehubah luar  $t$  (yang berstruktur sama) tidak kosong, operasi ini mengeluarkan persilangan tersebut sebagai hasil, dan semua nombor yang wujud dalam  $s$  disingkirkan daripada pembolehubah luarnya. Berikan spesifikasi operasi MEE ini.

(15/100)

- (b) (i) Berikan takrif tersirat suatu fungsi dengan dua hujah  $x, y$  dan hasil  $r$ , kesemuanya nombor asli. Sekiranya  $y$  tidak melebihi  $x$ , fungsi ini mengirakan hasil tambah dua hujah tersebut.
- (ii) Di samping itu, suatu operasi mempunyai hujah-hujah dan hasil yang sama tetapi berupaya menulis ke atas suatu pembolehubah luar nombor asli  $z$ . Sekiranya  $y$  tidak melebihi  $x$ , operasi ini mengirakan hasil tolak nilai pembolehubah luarnya daripada hasil tambah  $x$  dengan  $y$ , dan nilai yang diperolehi dikeluarkan sebagai output dan juga disimpan dalam pembolehubah luar. Berikan spesifikasi operasi ini.
- (iii) Untuk membandingkan fungsi dengan operasi di atas, data ujian diberikan dengan  $x = 3$  dan  $y = 2$ . Apakah hasil fungsi dan apakah hasil operasi tersebut (nilai awal  $z = 0$ )? Seterusnya, kedua-dua fungsi dan operasi ini dilaksanakan sekali lagi dengan data ujian yang sama. Apakah hasil-hasilnya kali ini?

(15/100)

...5/-

(c) (i) Operasi B00M menerima nombor nyata  $x$  sebagai hujah dan menghasilkan sesuatu yang diberi nama  $r$ . Operasi ini berupaya merujuk kepada suatu pembolehubah luar nombor asli  $y$ . Sekiranya nilai pembolehubah luarnya genap, operasi ini dapat dilaksanakan untuk memperoleh yang berikut:

- hasil tambah hujah dan pembolehubah luar dioutputkan sebagai hasil dan juga disimpan dalam pembolehubah luar apabila input operasi ini suatu nombor asli, dan
- mesej 0!! dioutputkan di sebaliknya.

Berikan spesifikasi operasi B00M ini.

(ii) Berikan spesifikasi suatu operasi bernama SIDEK yang menerima suatu set nombor asli  $x$  sebagai hujah dan berupaya membaca suatu pembolehubah luar  $y$  yang merupakan unsur set of set of IN. Operasi ini boleh dilaksanakan hanya apabila terdapat nombor asli dalam hujah dan juga dalam pembolehubah luar. Apabila dilaksanakan, operasi ini menghasilkan set semua nombor asli yang terlibat dalam hujah dan juga pembolehubah luar.

(25/100)

(d) Katakan  $S = \{a, b, c\}$

(i) Tuliskan set Petakan( $S$ ), iaitu set yang mengandungi semua petakan yang mungkin untuk set  $S$ .

(ii) Operasi CAPAI berupaya merujuk kepada suatu petakan  $p$  bagi  $S$  yang disimpan sebagai pembolehubah luar. Apabila diberi suatu unsur  $x$  dalam  $S$  sebagai hujah, operasi ini menghasilkan kumpulan  $r$  dalam  $p$  yang mengandungi  $x$ . Berikan spesifikasi CAPAI ini.

(iii) Berikan takrif langsung fungsi "card" yang mengirakan bilangan unsur dalam sesuatu set yang mengandungi unsur-unsur dari  $S$ .

...6/-

- (iv) Dengan menggunakan fungsi "card" ini, berikan spesifikasi suatu operasi bernama BILKUMP yang berupaya merujuk kepada suatu petakan  $p$  bagi  $S$  yang disimpan sebagai pembolehubah luar, dan apabila diberi suatu unsur  $x$  dari  $S$  sebagai hujah, ia mengirakan bilangan unsur untuk kumpulan dalam  $p$  yang mengandungi  $x$ .
- (v) Fungsi "gabung" pula menerima dua unsur dari  $S$  sebagai hujah bersama suatu petakan  $p$  bagi  $S$ . Sekiranya dua unsur hujah ini tidak terdapat dalam kumpulan yang sama dalam  $p$ , fungsi ini dapat dilaksanakan untuk mengoutputkan suatu petakan baru yang mengandungi gabungan kumpulan-kumpulan dalam  $p$  yang mengandungi hujah-hujah tersebut (tanpa menukar kumpulan-kumpulan lain). Berikan takrif tersirat fungsi ini.
- (vi) Fungsi "gabungan" ditakrifkan seperti berikut, dengan fungsi "gabung" seperti yang ditakrifkan di atas.

gabungan  $(x,y : S) r : \text{set of set of set of } S$   
post  $r = \{\text{gabung}(x,y,p) \mid p \in \text{Petakan}(S)\}$

Apakah nilai gabungan  $(a,b)$ ?

(45/100)

3. (a) Katakan  $Pel$  ialah suatu set yang mengandungi nama semua pelajar di USM (di sini 'pelajar' tidak perlu ditaktifkan).
- (i) Suatu objek gubahan diperlukan untuk menyimpan maklumat tentang nilai motosikal-motosikal yang dipunyai pelajar-pelajar USM. Objek ini ingin diberi nama  $M/sikal$  dan menyimpan tiga jenis maklumat: nama pelajar, jenis motosikal yang dipunyainya (iaitu Yamaha, Suzuki atau Honda), dan nilai motosikal itu (suatu nombor asli). Berikan takrif objek gubahan  $M/sikal$  ini.

...7/-

- (ii) Berikan tandatangan fungsi mk- untuk objek gubahan M/sikal ini, dan seterusnya gunakan fungsi tersebut untuk membina suatu objek untuk menyimpan maklumat bahawa Abu mempunyai motosikal Honda berharga \$875. Namakan objek ini b.
- (iii) Berikan tandatangan fungsi-fungsi pemilih bagi M/sikal dan gunakannya ke atas objek b di atas.
- (iv) Gunakan fungsi  $\mu$  ke atas objek b untuk menunjukkan hakikat bahawa Abu telah menukar motosikalnya kepada jenis Yamaha yang bernilai \$980. Jawapan anda hendaklah berbentuk berikut:

$$\mu (\dots, \dots) = \dots$$

- (v) Tulis semula takrif objek gubahan M/sikal untuk merangkumi suatu tak-varian yang menunjukkan bahawa nilai motosikal Suzuki tidak pernah melebihi \$800 walhal nilai motosikal Honda sentiasa terletak di antara \$500 hingga \$1500.
- (vi) Seorang penjual motosikal terpakai bersedia menolong pelajar-pelajar menjual motosikal mereka. Untuk menentukan harga jualan, ia menggunakan suatu fungsi bernama "salesman" yang menerima suatu hujah berbentuk objek gubahan M/sikal dan mengoutputkan harga jualan yang diperlukan. Fungsi ini tidak akan menerima motosikal kepunyaan Mamat dan juga motosikal-motosikal Suzuki yang bernilai kurang daripada \$500. Sekiranya syarat-syarat ini dipenuhi, fungsi ini menghasilkan harga jualan dengan amaun 50% lebih mahal daripada nilai sebenar motosikal yang diberikan sebagai input. Berikan takrif tersirat fungsi "salesman" ini.

(55/100)

(b) Katakan Abjad ialah set huruf a hingga z, iaitu {a, ..., z}.

- (i) Takrifkan objek gubahan Perkataan untuk mewakili sesuatu perkataan (yang merupakan suatu senarai huruf).

...8/-

- (ii) Berdasarkan takrif ini, tunjukkan perwakilan perkataan "busuk" melalui rajah pohon yang menggambarkan objek dari Perkataan.
- (iii) Dengan menggunakan fungsi "kod" berikut yang menghasilkan kod ASCII sesuatu huruf,

kod ( $\alpha$ : Abjad)  $r$  : IN  
post  $r = \langle$  kod ASCII bagi huruf  $\alpha \rangle$

berikan takrif langsung suatu fungsi bernama "ascii" yang mengirakan jumlah kod ASCII huruf-huruf dalam suatu unsur daripada Perkataan yang diberikan sebagai hujah. Gunakan cases\_of -- end dalam takrif anda.

- (iv) Diberi dua unsur dari Perkataan, fungsi "concat" mencantumkan unsur kedua di belakang unsur pertama

contoh: concat(abc, xyz) = abc xyz

Berikan takrif langsung fungsi ini.

(45/100)

4. (a) Katakan Name ialah set semua nama yang mungkin (seperti biasa, 'nama' tidak perlu ditakrifkan di sini).

- (i) Suatu operasi bernama LKAHWIN berupaya merujuk kepada suatu senarai nama l (iaitu subset kepada Name) dan juga senarai nama m. Kedua-duanya disimpan sebagai pembolehubah luar. Senarai l menyimpan nama-nama lelaki walhal senarai m menyimpan nama-nama orang yang sudah berkahwin. Apabila dilaksanakan, operasi ini menghasilkan senarai nama semua lelaki yang sudah berkahwin. Berikan spesifikasi operasi LKAHWIN ini.

...9/-



- (ii) Operasi PERKAHWINAN pula merujuk kepada kedua-dua pembolehubah luar  $l$  dan  $m$  seperti di atas, dan juga suatu pembolehubah luar tambahan  $p$  yang menyimpan senarai nama perempuan (juga suatu subset kepada Name). Operasi ini digunakan untuk menambah sepasang nama  $x,y$  ke dalam senarai orang yang sudah berkahwin, tetapi hanya setelah disemak bahawa  $x$  merupakan lelaki yang belum berkahwin dan  $y$  seorang perempuan yang juga belum berkahwin. Berikan spesifikasi operasi ini.
- (iii) Senarai nama orang yang sudah berkahwin boleh ditukar bentuk agar ia menerminkan pasangan yang berkahwin. Suatu objek gubahan yang menyimpan nama suami (iaitu lelaki) yang dipasangkan dengan nama isterinya (iaitu perem) boleh ditakrifkan. Dengan itu, suatu senarai orang yang sudah berkahwin menjadi suatu set objek-objek seperti ini. Takrifkan objek gubahan ini dengan nama "Kahwin".
- (iv) Kini berikan semula spesifikasi operasi LKAHWIN (dengan nama LKAHWINX) yang menggunakan set objek gubahan kahwin untuk menggantikan struktur data set bagi  $m$  dalam soalan (i) di atas.
- (v) Takrifkan semula operasi PERKAHWINAN (dengan nama PERKAHWINANX) dalam soalan (ii) di atas dengan cara yang sama.
- (vi) Juga dengan menggunakan set objek gubahan Kahwin untuk mewakili senarai nama ( $m$ ) orang yang sudah berkahwin (suatu pembolehubah luar), berikan spesifikasi operasi PENCERAIAN yang menyingkirkan daripada senarai  $m$  dua nama  $x$  dan  $y$  yang diberikan sebagai hujah. Bagaimana pun, operasi ini menyemak dahulu bahawa pasangan  $x,y$  ini memang wujud di dalam senarai tersebut sebelum ia disingkirkan.

...10/-

(vii) Untuk mengemaskinikan rekod bagi seseorang lelaki yang menceraikan isterinya dan seterusnya berkahwin lain, suatu operasi KAHWINBARU digunakan. Operasi ini menerima tiga hujah  $x, y$  dan  $z$ , dengan syarat  $x$  dan  $y$  kini sudah berkahwin dan  $z$  ialah seorang perempuan yang belum berkahwin. Setelah dilaksanakan, rekod akan menunjukkan bahawa  $x$  kini berkahwin dengan  $z$ , dan tiada hubungan wujud di antara  $x$  dan  $y$ . Berikan spesifikasi operasi ini.

(50/100)

(b) (i) Tuliskan pasangan-pasangan berikut sebagai suatu petaan  $m$ .

$(a,1), (b,2), (c,2), (d,1), (e,3), (f,1)$

(ii) Untuk petaan  $m_1$ , isikan nilai-nilai berikut:

$m_1(b) = ?$   
 $\text{dom}(m_1) = ?$   
 $\text{rng}(m_1) = ?$

(iii) Katakan  $m = \{b \mapsto 1, f \mapsto 3, g \mapsto 3\}$   
Berikan nilai ungkapan-ungkapan berikut:

$m_1 \uparrow m_2 = ?$   
 $m_2 \uparrow m_1 = ?$

(iv) Seterusnya, berikan nilai ungkapan-ungkapan berikut:

$\{b,e\} \triangleleft m = ?$   
 $\{b,e,g\} \triangleleft m = ?$

(20/100)

...11/-

- (c) Masalah dalam soalan 3(a) dapat diperkembangkan untuk menyimpan maklumat tambahan, khususnya untuk pelajar-pelajar yang mempunyai lebih daripada satu motosikal.
- (i) Mula-mula, suatu objek gubahan dapat ditakrifkan untuk menyimpan harga jenis (iaitu Yamaha, Suzuki atau Honda) dan nilainya (suatu nombor asli). Takrifkan objek gubahan ini dengan nama Bike.
- (ii) Kemudian suatu petaan boleh ditakrifkan untuk menyimpan bilangan sesuatu jenis motosikal (termasuk nilainya). Takrifkan petaan ini dengan nama Bilangan.
- (iii) Akhir sekali, maklumat tentang kepunyaan seseorang pelajar dapat disimpan dengan menggunakan suatu objek gubahan yang mengandungi nama pelajar dan suatu petaan dari Bilangan. Dengan ini seseorang pelajar mungkin mempunyai 1 Honda bernilai \$700, 1 lagi Honda bernilai \$850, 2 Suzuki bernilai \$1000, dsb. Berikan takrif objek gubahan ini dengan nama Pelajar.
- (iv) Tambahkan suatu tak varian kepada objek gubahan Pelajar di atas untuk menunjukkan bahawa semua motosikal jenis Suzuki sentiasa bernilai di antara \$500 hingga \$1500.

(30/100)

...0000...

## Appendix E

### Glossary of Symbols

#### Numbers

$N_1 = \{1, 2, \dots\}$	
$N = \{0, 1, 2, \dots\}$	
0, succ	as generators
$Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$	
$R =$ real numbers	
normal arithmetic operators (e.g. +, -, <)	
mod	modulus

#### Functions

$f: D_1 \times D_2 \rightarrow R$	signature
$f(d)$	application
$\lambda x \in T \cdot t$	abstraction
if ... then ... else ...	conditional
let $x = \dots$ in ...	local definition

#### Logic

$B = \{\text{true}, \text{false}\}$   
 $E_i$  are logical expressions,  $\Gamma$  is a list of logical expressions

$\neg E$	negation <sup>1</sup>
$E_1 \wedge E_2$	conjunction
$E_1 \vee E_2$	disjunction
$E_1 \Rightarrow E_2$	implication
$E_1 \Leftrightarrow E_2$	equivalence
$\forall x \in T \cdot E$	universal quantifier <sup>2</sup>
$\exists x \in T \cdot E$	existential quantifier
$\exists! x \in T \cdot E$	unique existence
$\Gamma \vdash E$	sequent $E$ can be proved from $\Gamma$ (hypothesis $\vdash$ conclusion)
$\Gamma \models E$	sequent ( $E$ is true in all worlds where $\Gamma$ all true)
$\frac{\Gamma}{E}$	inference rule
$\frac{E_1}{E_2}$	bidirectional inference rule

**Sets**

$S, T$  are sets,  $t_i$  are terms

set of $T$	all finite subsets of $T$
$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$	set enumeration
$\{\}$	empty set
$\oplus$	generator
$\{x \in T \mid E\}$	set comprehension
$\{i, \dots, j\}$	subset of integers
$t \in S$	set membership
$t \notin S$	$\neg(t \in S)$
$S \subseteq T$	set containments (subset of)
$S \subset T$	strict set containment

<sup>1</sup>The five propositional operators are given in decreasing order of priority

<sup>2</sup>With all of the quantifiers, the scope extends as far as possible to the right; no parentheses are required but they can be used for extra grouping.

APPENDIX E. GLOSSARY OF SYMBOLS

$S \cap T$	set intersection <sup>3</sup>
$S \cup T$	set union
$S - T$	set difference
$S \circ T$	symmetric set difference
$\cup S$	distributed union
$\text{card } S$	cardinality of a set

Maps

$M$ is a map	
map $D$ to $R$	finite maps
$\text{dom } M$	domain
$\text{rng } M$	range
$\{d_1 \mapsto r_1, d_2 \mapsto r_2, \dots, d_n \mapsto r_n\}$	map enumeration
$\{\}$	empty map
$\oplus$	generator
$\{d \mapsto f(d) \mid E\}$	map comprehension
$m(d)$	application
$S \triangleleft M$	domain restriction
$S \triangleleft\!\!\!\triangleleft M$	domain deletion
$M_1 \uparrow M_2$	overwriting

Sequences

$s, t$ are sequences	
seq of $T$	finite sequences
$\text{len } s$	length
$[t_1, t_2, \dots, t_n]$	sequence enumeration
$[\ ]$	empty sequence
$\text{cons}$	generator
$s \widehat{\ } t$	concatenation
$\text{hd } s$	head
$\text{tl } s$	tail
$s(i, \dots, j)$	sub-sequence

<sup>3</sup>Intersection is higher priority than union.

### Composite Objects

*o* is a composite object

**compose** *N* of ... **end**

where **inv**-*N*()  $\triangleq$  ...

::

**nil**

**mk**-*N*()

*s*<sub>1</sub>(*o*)

$\mu(o, s_1 \mapsto t)$

**invariant**

**compose**

**omitted object**

**generator**

**selector**

modify a component

### Function Specification

*f* (*d*: *D*) *r*: *R*

**pre** ... *d* ...

**post** ... *d* ... *r* ...

### Operation Specification

*OP* (*p*: *T*<sub>1</sub>) *r*: *T*<sub>2</sub>

**ext rd** *e*<sub>1</sub>: *T*<sub>1</sub>, **wr** *e*<sub>2</sub>: *T*<sub>2</sub>

**pre** ... *p* ... *e*<sub>1</sub> ... *e*<sub>2</sub> ...

**post** ... *p* ... *e*<sub>1</sub> ...  $\overline{e_2}$  ... *r* ... *e*<sub>2</sub> ...

## Appendix A

### Rules of Logic

#### Conventions

1.  $E, E_1, \dots$  denote logical expressions.
2.  $x, y, \dots$  denote variables over proper elements in a universe.
3.  $c, c_1, \dots$  denote constants over proper elements in a universe.
4.  $s, s_1, \dots$  denote terms which may contain partial functions.
5.  $E(x)$  denotes a formula in which  $x$  occurs free.
6.  $E(s/x)$  denotes a formula obtained by substituting all free occurrences of  $x$  by  $s$  in  $E$ . If a clash between free and bound variables would occur, suitable renaming is performed before the substitution.
7.  $E[s_2/s_1]$  denotes a formula obtained by substituting some occurrences of  $s_1$  by  $s_2$ . If a clash between free and bound variables would occur, then suitable renaming is performed before the substitution.
8.  $X$  is a non-empty set.
9. An "arbitrary" variable is one about which no results have been established.



### General Properties

$$\text{inf} \quad \frac{E_1 \vdash E_2; E_1}{E_2}$$

$$\text{var-l} \quad \frac{}{x^1 \in X}$$

commutativity ( $\vee / \wedge / \leftrightarrow$ -comm)

$$\frac{E_1 \vee E_2}{E_2 \vee E_1}$$

$$\frac{E_1 \wedge E_2}{E_2 \wedge E_1}$$

$$\frac{E_1 \leftrightarrow E_2}{E_2 \leftrightarrow E_1}$$

associativity ( $\vee / \wedge / \leftrightarrow$ -ass)

$$\frac{(E_1 \vee E_2) \vee E_3}{E_1 \vee (E_2 \vee E_3)}$$

$$\frac{(E_1 \wedge E_2) \wedge E_3}{E_1 \wedge (E_2 \wedge E_3)}$$

$$\frac{(E_1 \leftrightarrow E_2) \leftrightarrow E_3}{E_1 \leftrightarrow (E_2 \leftrightarrow E_3)}$$

transitivity ( $\Rightarrow / \leftrightarrow$ -trans)

$$\frac{E_1 \Rightarrow E_2; E_2 \Rightarrow E_3}{E_1 \Rightarrow E_3}$$

$$\frac{E_1 \leftrightarrow E_2; E_2 \leftrightarrow E_3}{E_1 \leftrightarrow E_3}$$

substitution

$$\text{=t-subst} \quad \frac{s_1 = s_2; E}{E[s_2/s_1]}$$

$$\text{=v-subst} \quad \frac{s \in X; x \in X \vdash E(x)}{E(s/x)}$$

$$\text{=-comm} \quad \frac{s_1 = s_2}{s_2 = s_1}$$

$$\text{=-trans} \quad \frac{s_1 = s_2; s_2 = s_3}{s_1 = s_3}$$

$$f: D \rightarrow R$$

$$f(d) \triangleq c$$

$$c_0 = c(d_0/d)$$

<sup>1</sup>x is arbitrary

APPENDIX A. RULES OF LOGIC

$$\underline{\Delta\text{-subs}} \quad \frac{d_0 \in D; E(e_0)}{E[f(d_0)/e_0]}$$

$$\underline{\Delta\text{-inst}} \quad \frac{d_0 \in D; E(f(d_0))}{E[e_0/f(d_0)]}$$

$$f(d) \triangleq \text{if } e \text{ then } ct \text{ else } cf$$

$$\text{if-subs} \quad \frac{d_0 \in D; e_0; E(ct_0)}{E[f(d_0)/ct_0]} \qquad \frac{d_0 \in D; \neg e_0; E(cf_0)}{E[f(d_0)/cf_0]}$$

Definitions of Connectives

$$\text{f-defn} \quad \frac{\neg \text{true}}{\text{false}}$$

$$\underline{\wedge\text{-defn}} \quad \frac{\neg(\neg E_1 \vee \neg E_2)}{E_1 \wedge E_2}$$

$$\underline{\Rightarrow\text{-defn}} \quad \frac{\neg E_1 \vee E_2}{E_1 \Rightarrow E_2}$$

$$\underline{\Leftrightarrow\text{-defn}} \quad \frac{(E_1 \Rightarrow E_2) \wedge (E_2 \Rightarrow E_1)}{E_1 \Leftrightarrow E_2}$$

$$\underline{\forall\text{-defn}} \quad \frac{\neg \exists x \in X \cdot \neg E(x)}{\forall x \in X \cdot E(x)}$$

Relationships between Operators

$$\text{deM} \quad \frac{\neg(E_1 \vee E_2)}{\neg E_1 \wedge \neg E_2} \qquad \frac{\neg(E_1 \wedge E_2)}{\neg E_1 \vee \neg E_2}$$

$$\frac{\neg \exists x \in X \cdot E(x)}{\forall x \in X \cdot \neg E(x)} \qquad \frac{\neg \forall x \in X \cdot E(x)}{\exists x \in X \cdot \neg E(x)}$$

$$\text{dist} \quad \frac{E_1 \vee E_2 \wedge E_3}{(E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_3)} \quad \frac{E_1 \wedge (E_2 \vee E_3)}{E_1 \wedge E_2 \vee E_1 \wedge E_3}$$

$$\exists\vee\text{-dist} \quad \frac{\exists x \in X \cdot E_1(x) \vee E_2(x)}{(\exists x \in X \cdot E_1(x)) \vee (\exists x \in X \cdot E_2(x))}$$

$$\exists\wedge\text{-dist} \quad \frac{\exists x \in X \cdot E_1(x) \wedge E_2(x)}{(\exists x \in X \cdot E_1(x)) \wedge (\exists x \in X \cdot E_2(x))}$$

$$\forall\vee\text{-dist} \quad \frac{(\forall x \in X \cdot E_1(x)) \vee (\forall x \in X \cdot E_2(x))}{\forall x \in X \cdot E_1(x) \vee E_2(x)}$$

$$\forall\wedge\text{-dist} \quad \frac{(\forall x \in X \cdot E_1(x)) \wedge (\forall x \in X \cdot E_2(x))}{\forall x \in X \cdot E_1(x) \wedge E_2(x)}$$

### Substitution

$$\wedge\text{-subs} \quad \frac{E_1 \wedge \dots \wedge E_i \wedge \dots \wedge E_n; E_i \vdash E}{E_1 \wedge \dots \wedge E \wedge \dots \wedge E_n}$$

$$\vee\text{-subs} \quad \frac{E_1 \vee \dots \vee E_i \vee \dots \vee E_n; E_i \vdash E}{E_1 \vee \dots \vee E \vee \dots \vee E_n}$$

$$\exists\text{-subs} \quad \frac{\exists x \in X \cdot E_1(x); E_1(x) \vdash E(x)}{\exists x \in X \cdot E(x)}$$

$$\text{contr} \quad \frac{E_1; \neg E_1}{E_2}$$

$$\Rightarrow\text{-contrp} \quad \frac{E_1 \Rightarrow E_2}{\neg E_2 \Rightarrow \neg E_1}$$

APPENDIX A. RULES OF LOGIC

INTRODUCTION(*op-I*)    ELIMINATION(*op-E*)

$\neg\neg$	$\frac{E}{\neg\neg E}$	$\frac{\neg\neg E}{E}$
$\vee$	$\frac{E_i}{E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_n}$	$\frac{E_1 \vee \dots \vee E_n; E_1 \vdash E; \dots; E_n \vdash E}{E}$
$\wedge$	$\frac{E_1; E_2; \dots; E_n}{E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n}$	$\frac{E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_n}{E_i}$
$\neg\vee$	$\frac{\neg E_1; \neg E_2; \dots; \neg E_n}{\neg(E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_n)}$	$\frac{\neg(E_1 \vee E_2 \vee \dots \vee E_n)}{\neg E_i}$
$\neg\wedge$	$\frac{\neg E_i}{\neg(E_1 \wedge \dots \wedge E_n)}$	$\frac{\neg(E_1 \wedge \dots \wedge E_n); \neg E_1 \vdash E; \dots; \neg E_n \vdash E}{E}$
$\Rightarrow$	$\frac{E_1 \vdash E_2; E_1 \in B}{E_1 \Rightarrow E_2}$	
vac $\Rightarrow$	$\frac{E_2}{E_1 \Rightarrow E_2}$	$\frac{E_1 \Rightarrow E_2; \neg E_2}{\neg E_1}$
	$\frac{\neg E_1}{E_1 \Rightarrow E_2}$	$\frac{E_1 \Rightarrow E_2; E_1}{E_2}$
$\Leftrightarrow$	$\frac{E_1 \wedge E_2}{E_1 \Leftrightarrow E_2}$	$\frac{E_1 \Leftrightarrow E_2}{E_1 \wedge E_2 \vee \neg E_1 \wedge \neg E_2}$
	$\frac{\neg E_1 \wedge \neg E_2}{E_1 \Leftrightarrow E_2}$	
$\neg \Leftrightarrow$	$\frac{E_1 \wedge \neg E_2}{\neg(E_1 \Leftrightarrow E_2)}$	$\frac{\neg(E_1 \Leftrightarrow E_2)}{E_1 \wedge \neg E_2 \vee \neg E_1 \wedge E_2}$

$$\frac{\neg E_1 \wedge E_2}{\neg(E_1 \Leftrightarrow E_2)}$$

$$\exists \frac{s \in X; E(s/x)}{\exists x \in X \cdot E(x)}$$

$$\frac{\exists x \in X \cdot E(x); y^2 \in X, E(y/x) \vdash E_1}{E_1}$$

$$\forall \frac{x^3 \in X \vdash E(x)}{\forall x \in X \cdot E(x)}$$

$$\frac{\forall x \in X \cdot E(x); s \in X}{E(s/x)}$$

$$\neg\exists \frac{x \in X \vdash \neg E(x)}{\neg\exists x \in X \cdot E(x)}$$

$$\frac{\neg\exists x \in X \cdot E(x); s \in X}{\neg E(s/x)}$$

$$\neg\forall \frac{s \in X; \neg E(s/x)}{\neg\forall x \in X \cdot E(x)}$$

$$\frac{\neg\forall x \in X \cdot E(x); y^4 \in X, \neg E(y/x) \vdash E}{E}$$

### Miscellaneous

$$\exists\text{split} \frac{\exists x \in X \cdot E(x, x)}{\exists x, y \in X \cdot E(x, y)}$$

$$\forall\text{ix} \frac{\forall x, y \in X \cdot E(x, y)}{\forall x \in X \cdot E(x, x)}$$

$$\forall \rightarrow \exists \frac{\forall x \in X^5 \cdot E(x)}{\exists x \in X \cdot E(x)}$$

$$\frac{\exists x \in X \cdot \forall y \in Y \cdot E(x, y)}{\forall y \in Y \cdot \exists x \in X \cdot E(x, y)}$$

<sup>2</sup> y is arbitrary and not free in E<sub>1</sub>

<sup>3</sup> x is arbitrary.

<sup>4</sup> y is arbitrary and not free in E

<sup>5</sup> X is non-empty

APPENDIX A. RULES OF LOGIC

	$\forall x \in X \cdot E_1(x) \Leftrightarrow E_2(x)$
	$(\forall x \in X \cdot E_1(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X \cdot E_2(x))$
==-contr	$\frac{\neg(s = s)}{E}$
=-term	$\frac{s \in X}{s = s}$
=-comp	$\frac{s_1, s_2 \in X}{(s_1 = s_2) \vee \neg(s_1 = s_2)}$
$\Delta$ -I	$\frac{E}{\Delta E}$
	$\frac{\neg E}{\Delta E}$
$\Delta$ -E	$\frac{\Delta E; E \vdash E_1; \neg E \vdash E_1}{E_1}$
$\neg\Delta$ -I	$\frac{\Delta E \vdash E_1; \Delta E \vdash \neg E_1}{\neg\Delta E}$
$\neg\Delta$ -E	$\frac{\neg\Delta E \vdash E_1; \neg\Delta E \vdash \neg E_1}{\Delta E}$
===-refl	$s === s$
===-subs	$\frac{s_1 === s_2; E}{E[s_2/s_1]}$
===-comm	$\frac{s_1 === s_2}{s_2 === s_1}$
===-trans	$\frac{s_1 === s_2; s_2 === s_3}{s_1 === s_3}$
===- $\in$	$\frac{s_1 === s_2; s_1 \in X}{s_1 = s_2}$
== $\in$ ==	$\frac{s_1 = s_2}{s_1 === s_2}$

## Appendix B

### Properties of Data

#### Relations

Ordering: Transitive, Reflexive, Antisymmetric.

Equivalence: Transitive, Reflexive, Symmetric.

#### Natural Numbers (cf. Section 3.2)

$0: \mathbb{N}$

$succ: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{N-ind} \quad \frac{p(0); n \in \mathbb{N}, p(n) \vdash p(n+1)}{n \in \mathbb{N} \vdash p(n)}$$

$$\text{N-indp} \quad \frac{p(0); n \in \mathbb{N}_1, p(n-1) \vdash p(n)}{n \in \mathbb{N} \vdash p(n)}$$

$$\text{N-cind} \quad \frac{n, m \in \mathbb{N}, m < n \Rightarrow p(m) \vdash p(n)}{n \in \mathbb{N} \vdash p(n)}$$

#### Sets (cf. Section 4.3)

$s, s_i$  are sets

$\{\}$ : set of  $X$

$\rightarrow \rightarrow -: X \times \text{set of } X \rightarrow \text{set of } X$

Bentuk umum petua  $\Delta$ -subs dan  $\Delta$ -inst.

Andaikan:

$$f : D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow R$$

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n) \Delta e$$

$$e_0 = e(d_1/m_1, \dots, d_n/m_n)$$

$$\Delta\text{-subs } d_1 \in D_1, \dots, d_n \in D_n ; E(e_0)$$

---

$$E[f(d_1, \dots, d_n)/e_0]$$

$$\Delta\text{-inst } d_1 \in D_1, \dots, d_n \in D_n ; E(f(d_1, \dots, d_n))$$

---

$$E[e_0/f(d_1, \dots, d_n)]$$