UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

CST201 - Struktur Diskret

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 6 muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Semua jawapan mestilah ditulis di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Gunakan hukum-hukum H1-H12 untuk mendapatkan bentuk kanonik hasil tambah hasil darab (HTHD) rumus berikut:

$$(Q \vee R) \rightarrow P$$

(15 markah)

(b) Diberi rumus bentuk akhiran

$$RPQ \vee QP \neg \wedge \rightarrow \wedge$$

Gunakan gambarajah pohon untuk menentukan semua keadaan yang menyebabkan rumus ini benar. Kemudian berikan bentuk kanonik hasil darab hasil tambahnya (HDHT).

(20 markah)

(c) Berdasarkan jawapan anda bagi (a) dan (b) di atas, tentukan sama ada hujah berikut merupakan suatu hujah sah (terangkan):

$$\neg R \rightarrow P \vdash ((((P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge Q)) \wedge R) \vee ((Q \vee R) \rightarrow P))$$

(20 markah)

...2/-

(d) Menganggapkan hujah dalam (c) sebagai suatu hujah sah, simpulkan sama ada hujah berikut merupakan hujah sah atau tidak (terangkan):

Hakikat bahawa, jika Ali malas atau suka tidur maka dia suka tidur dan tidak malas, tetapi dia akan lulus peperiksaan, adalah tidak benar; tidak benar juga bahawa dia malas sekiranya sama ada dia suka tidur atau akan lulus peperiksaan. Oleh demikian, Ali tidak malas tetapi tidak akan lulus peperiksaan.

(25 markah)

(e) Jadual kebenaran berikut menakrifkan dua pengait biner, iaitu ♀ dan *.

P	Q	P ♀ Q	P * Q
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

Dengan hanya menggunakan maklumat bahawa set pengait $\{\neg, ♀\}$ adalah lengkap secara fungsian, buktikan bahawa set pengait $\{\neg, *\}$ juga merupakan set pengait yang lengkap secara fungsian.

(20 markah)

2\. (a) Gunakan kaedah bukti secara automatik untuk menentukan sama ada hujah berikut merupakan suatu hujah sah atau tidak:

Jika saya sentiasa gosok gigi, maka gigi saya tak rongak; sama ada gigi saya rongak atau gusi saya berkulat. Oleh demikian, saya sentiasa gosok gigi tetapi gusi saya berkulat.

(25 markah)

...3/-

(b) Dengan menambah petua-petua pentaabiran berikut kepada senarai petua pentaabiran yang disediakan,

$$-||-k: \frac{(y = x),\ (x \geq 0)}{y = |x|}$$

$$+||-k: \frac{(y = -x),\ x < 0}{y = |x|}$$

dirikan suatu bukti formal untuk membuktikan pernyataan berikut:

$$((y = x) \wedge (x \geq 0)) \vee ((y = -x) \wedge (x < 0)) \vdash y = |x|$$

(25 markah)

(c) Dirikan bukti formal untuk membuktikan kesetaraan berikut:

$$\neg P \vee Q \iff P \rightarrow Q$$

[Petunjuk: (i) gunakan V-H untuk membuktikan $\Rightarrow$
(ii) gunakan percanggahan untuk membuktikan $\Leftarrow$].

(50 markah)

3. (a) Katakan $X = \{1, 3, a\}$ ialah alam semesta dan diberikan predikat-predikat berikut:

N(x)	:	x suatu nombor
A(x)	:	x suatu huruf
B(x)	:	x nombor genap
C(x)	:	x nombor ganjil
D(x,y)	:	x terbahagikan oleh y

(i) Kembangkan tegasan-tegasan berikut ke dalam bentuk konjungsi/disjungsi untuk menentukan kebenaran atau kepalsuannya.

$$-(\forall x)(N(x) \wedge C(x))$$
$$-(\forall x)(N(x) \rightarrow C(x))$$

Kemudian tuliskan tegasan-tegasan ini dalam ayat Bahasa Malaysia yang mudah.

(20 markah)

(ii) Tuliskan ayat-ayat berikut dalam bentuk bersimbol dengan menggunakan predikat-predikat di atas:

- Ada terdapat yang bukan nombor genap dan bukan juga nombor ganjil.
- Semua nombor genap terbahagikan oleh suatu huruf.

Kemudian nyatakan sama ada ayat-ayat ini benar atau palsu. Jika palsu, berikan contoh yang menyebabkan palsu; dan jika benar, terangkan dengan contoh-contohnya.

(20 markah)

(b) Dirikan bukti formal untuk membuktikan hujah berikut:

$$(\forall x)(\forall y)(S(x) \rightarrow \neg P(y)),\ (\forall z)(P(z) \rightleftarrows Q(z)),$$
$$(\exists x)(\exists y)(\neg Q(x) \vee S(y)) \vdash (\exists z)\ \neg P(z)$$

(30 markah)

(c) Dengan mengambil $\mathbb{Z}$ sebagai alam semesta dan menganggapkan bahawa hujah di dalam (b) merupakan hujah sah, simpulkan (dengan memberi penerangan) bahawa hujah berikut juga merupakan hujah sah:

Untuk setiap dua integer x dan y, jika x melebihi 5 maka y melebihi 10; terdapat integer-integer p dan q yang memenuhi sama ada q melebihi 5 atau p tak kurang dari 3; tetapi semua integer tidak melebihi 10 jika dan hanya jika ia kurang dari 3. Oleh demikian, sama ada semua integer adalah di antara 7 dan 18 ataupun tidak benar bahawa semua integer tidak melebihi 10.

(30 markah)

...5/-

4. (a) (i) Buktikan ketetapan separa gelung berikut:

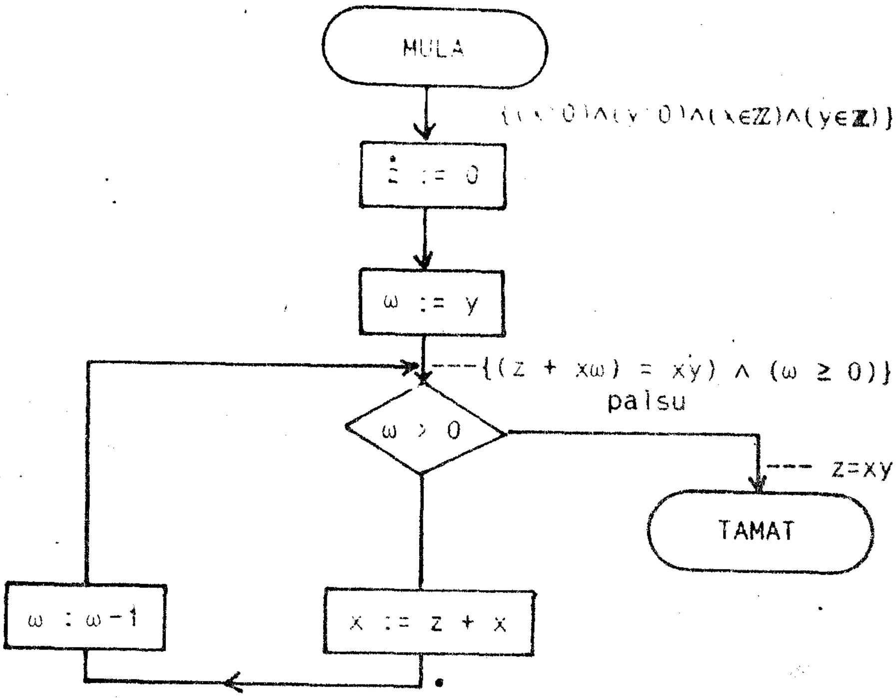
```
{(rn^k = n^2m) ∧ (k ≥ 0)}
  while   k > 0   do
          begin    r := r * n;
                   k := k - 1
          end
 {r = n^2m}
```

(30 markah)

(ii) Dengan menggunakan gelung ini, tuliskan suatu program yang dapat mengirakan nilai n^{2m} apabila diinputkan nilai-nilai integer n dan m, dengan $n > 0$ dan $m > 0$ (jangan lupakan tegasan-tegasan penting dalam program ini).

(15 markah)

(b) (i) Bagi carta aliran berikut, tuliskan suatu program yang melaksanakannya mengikut pernyataan-pernyataan dan aliran yang ditunjukkan (jangan lupakan tegasan-tegasan penting dalam program ini: bukti tidak diperlukan):



(15 markah)

(ii) Buktikan bahawa program berikut <u>tepat seluruh</u> dan melaksanakan tugas yang sama dengan carta aliran di atas.

```
begin    z := 0 ;  ω := x
         repeat   z := z + y ;  ω := ω - 1
                        until  ω = 0
         end
```

(40 markah)

- oooOooo -

	Jadual 1: Implikasi	
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	(penyederhanaan)
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	(penambahan)
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_7	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	
I_8	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$	(silogisma disjunksi)
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	(modus ponens)
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	(modus tollens)
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	(silogisma hipotesisan)
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	(dilema)
I_{15}	$(x)A(x) \vee (x)B(x) \Rightarrow (x)(A(x) \vee B(x))$	
I_{16}	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$	

Jadual 2: Kesetaraan

S_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	**(penafian ganda dua)**
S_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	**(Hukum kalis tukar tertib)**
S_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
S_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	**(Hukum kalis sekutuan)**
S_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
S_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	**(Hukum kalis taburan)**
S_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
S_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	**(Hukum De Morgan)**
S_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
S_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	
S_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
S_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow 1$	
S_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow 0$	
S_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
S_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
S_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	
S_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	
S_{20}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$	

Jadual 2: Kesetaraan (sambungan)

S_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
S_{22}	$(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
S_{23}	$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
S_{24}	$(x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (x)A(x) \wedge (x)B(x)$
S_{25}	$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (x) \neg A(x)$
S_{26}	$\neg(x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x)$
S_{27}	$(x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (x)B(x)$
S_{28}	$(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$
S_{29}	$(x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{30}	$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{31}	$A \rightarrow (x)B(x) \Leftrightarrow (x)(A \rightarrow B(x))$
S_{32}	$A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$
S_{33}	$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
S_{34}	$(\exists x)A(x) \rightarrow (x)B(x) \Leftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B(x))$

PETUA UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREM SECARA AUTOMATIK

Petua Anteseden:

Petua $\neg\Rightarrow$: Jika $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, \neg X, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\wedge\Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \wedge Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\vee\Rightarrow$: Jika $X, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \vee Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\rightarrow\Rightarrow$: Jika $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\rightleftarrows\Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, Y, \gamma$, maka $\alpha, X \rightleftarrows Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua Akibat:

Petua $\Rightarrow\neg$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, \neg X, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\wedge$: Jika $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$ dan juga $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \wedge Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\vee$: Jika $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \vee Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\rightarrow$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\rightleftarrows$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$ dan juga $Y, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \rightleftarrows Y, \gamma$

PETUA PENTAABIRAN DI DALAM SISTEM BUKTI FORMAL	
1(a)	$\wedge$ - K : $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}$
1(b)	$\wedge$ - H : $\dfrac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}{A_i}$
2(a)	$\vee$ - K : $\dfrac{A_i}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}$
2(b)	$\vee$ - H : $\dfrac{A_1 \vee \ldots \vee A_n,\ A_1 \to A,\ \ldots,\ A_n \to A}{A}$
3(a)	$\neg$ - K : $\dfrac{\underline{\text{Dari}}\ A\ \underline{\text{taabirkan}}\ A_1 \wedge \neg A_1}{\neg A}$
3(b)	$\neg$ - H : $\dfrac{\underline{\text{Dari}}\ \neg A\ \underline{\text{taabirkan}}\ A_1 \wedge \neg A_1}{A}$
4(a)	$\to$ - K : $\dfrac{\underline{\text{Dari}}\ A_1, \ldots, A_n\ \underline{\text{taabirkan}}\ A}{(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A}$
4(b)	$\to$ - H : $\dfrac{A_1 \to A_2,\ A_1}{A_2}$
5(a)	$\rightleftarrows$ - K : $\dfrac{A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1}{A_1 \rightleftarrows A_2}$
5(b)	$\rightleftarrows$ - H : $\begin{cases} \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_1 \to A_2} \\ \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_2 \to A_1} \end{cases}$
6(a)	(IF-THEN-ELSE)-K : $\dfrac{A \to B,\ \neg A \to C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$
6(b)	(IF-THEN-ELSE)-H: $\begin{cases} \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \to B} \\ \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \to C} \end{cases}$
7.	Petua Ketransitifan : $\dfrac{A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_3}{A_1 \to A_3}$
8.	Petua Penggantian : $\dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2,\ A(A_1)}{A(A_2)}$

AKSIOM BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM	
1.	Aksiom nol: $A\{\ \}A$
2.	Aksiom umpukan melalui Penggantian ke depan:
	$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$
	$(\exists y)(A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \wedge$
	$x_i = U(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
3.	Aksiom umpukan melalui Penggantian ke belakang:
	$A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, U(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$
	$\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

PETUA PENTAABIRAN BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM			
1.	$\dfrac{A_1\{P_1\}A_2,\ A_2\{P_2\}A_3}{A_1\{P_1;\ P_2\}A_3}$	(Petua Penggubahan)	
2(a)	$\dfrac{A_1 \rightarrow A_2,\ A_2\{P\}A_3}{A_1\{P\}A_3}$	(Petua Akibat)	
2(b)	$\dfrac{A_1\{P\}A_2,\ A_2 \rightarrow A_3}{A_1\{P\}A_3}$		
3.	$\dfrac{(A_1 \wedge \mathit{syarat})\{P_1\}A_2,\ (A_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat})\{P_2\}A_2}{A_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } P_1 \text{ ELSE } P_2\}A_2}$	(Petua IF-THEN-ELSE)	(Petua bersyarat)
4.	$\dfrac{(A_1 \wedge \mathit{syarat})\{P\}A_2,\ (A_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat}) \rightarrow A_2}{A_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } P\}A_2}$	(Petua IF-THEN)	
5.	$\dfrac{(A \wedge \mathit{syarat})\{P\}A}{A\{\text{WHILE } \mathit{syarat} \text{ DO } P\}(A \wedge \neg\, \mathit{syarat})}$	(Petua WHILE-DO)	(Petua Pelelaran)
6.	$\dfrac{A_1\{P\}A_2,\ (A_2 \wedge \neg\, \mathit{syarat}) \rightarrow A_1}{A_1\{\text{REPEAT } P \text{ UNTIL } \mathit{syarat}\}(A_2 \wedge \mathit{syarat})}$	(Petua REPEAT-UNTIL)	

KESEPADANAN ISOMORFISMA (KESEPADANAN SATU DENGAN SATU)		
Aljabar Set	**Aljabar Boolean**	**Aljabar Pernyataan**
		Hukum idempoten
$A \cup A = A$	$a + a = a$	$P \vee P \leftrightarrow P$ (1)
$A \cap A = A$	$a \cdot a = a$	$P \wedge P \leftrightarrow P$ (1)
		Hukum kalis sekutuan
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ (2)
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ (2)
		Hukum kalis tukar tertib
$A \cup B = B \cup A$	$a + b = b + a$	$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$ (3)
$A \cap B = B \cap A$	$a \cdot b = b \cdot a$	$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$ (3)
		Hukum kalis taburan
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$	$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (4)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (4)
$A \cup \emptyset = A$	$a + 0 = a$	$P \vee 0 \leftrightarrow P$ (5)
$A \cap S = A$ (S, set semesta)	$a \cdot 1 = a$	$P \wedge 1 \leftrightarrow P$ (5)
$A \cup S = S$	$a + 1 = 1$	$P \vee 1 \leftrightarrow 1$ (6)
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$a \cdot 0 = 0$	$P \wedge 0 \leftrightarrow 0$ (6)
$A \cup \bar{A} = S$	$a + \bar{a} = 1$	$P \vee \neg P \leftrightarrow 1$ (7)
$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$a \cdot \bar{a} = 0$	$P \wedge \neg P \leftrightarrow 0$ (7)
		Hukum penyerapan
$A \cup (A \cap B) = A$	$a + (a \cdot b) = a$	$P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$ (8)
$A \cap (A \cup B) = A$	$a \cdot (a + b) = a$	$P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$ (8)
		Hukum De Morgan
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$(\overline{a + b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ (9)
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$(\overline{a \cdot b}) = \bar{a} + \bar{b}$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ (9)
$\bar{\emptyset} = S$	$\bar{0} = 1$	$\neg 0 \leftrightarrow 1$ (10)
$\bar{S} = \emptyset$	$\bar{1} = 0$	$\neg 1 \leftrightarrow 0$ (10)
$(\bar{\bar{A}}) = A$	$(\bar{\bar{a}}) = a$	$\neg \neg P \leftrightarrow P$ (11)