KAEDAH-KAEDAH LELARAN BERPRASYARAT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA

SAM TEEK LING

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

2007

KAEDAH-KAEDAH LELARAN BERPRASYARAT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA

oleh

SAM TEEK LING

Tesis yang diserahkan untuk memenuhi keperluan bagi Ijazah Sarjana Sains

Julai 2007

PENGHARGAAN

Saya ingin mengambil kesempatan ini untuk mengucapkan ribuan terima kasih kepada penyelia saya, Prof. Madya Norhashidah Hj. Mohd. Ali atas segala tunjuk ajar beliau. Pengetahuan beliau dalam bidang pengiraan berangka banyak membantu saya untuk menyiapkan penyelidikan ini. Semasa saya menghadapi masalah dalam menjalankan penyelidikan, beliau banyak memberikan pandangan dan cadangan yang berguna kepada saya. Sikap beliau yang peramah dan sabar ini telah memberi keyakinan kepada saya untuk menangani cabaran.

Di samping itu, saya ingin berterima kasih kepada ibu bapa saya kerana mereka telah memberikan sokongan kepada saya sama ada daripada segi mental ataupun kewangan. Sokongan mereka telah membolehkan saya menjalankan penyelidikan dengan sepenuh hati.

Akhir sekali, saya ingin mengucapkan terima kasih kepada kawan-kawan saya atas sokongan mental mereka.

SUSUNAN KANDUNGAN

BAB TIGA : PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR

BAB EMPAT : PEMBANGUNAN RUMUS-RUMUS KAEDAH LELARAN TITIK DAN KAEDAH LELARAN BERKUMPULAN BAGI PERSAMAAN POISSON

BAB LIMA : PEMBANGUNAN RUMUS-RUMUS KAEDAH LELARAN TITIK DAN KAEDAH LELARAN BERKUMPULAN BAGI PERSAMAAN PEROLAKAN-RESAPAN

BAB ENAM : KAEDAH BERPRASYARAT

BAB TUJUH : UJIKAJI BERANGKA DAN PERBINCANGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI LAMBANG

Simbol	Penerangan	Muka surat
R^n	set nilai-nilai nyata berdimensi *n*	15
$\sum$	penghasiltambahan	15,18,27-28,30-32, 35,61-62,143
ε	nilai toleransi	33-34,119,155

SENARAI SINGKATAN

KAEDAH-KAEDAH LELARAN BERPRASYARAT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN PEMBEZAAN SEPARA

ABSTRAK

Kaedah-kaedah berangka merupakan antara teknik-teknik mencari penyelesaian hampir bagi persamaan pembezaan separa (PPS) yang timbul dalam bidang dinamik bendalir dan termodinamik. Oleh kerana penyelesaian analitik bagi masalah dalam bidang tersebut adalah rumit dan sukar diperoleh, jadi kaedah beza terhingga adalah salah satu kaedah tersedia pada masa kini yang berkebolehan menjanakan penyelesaian berangka bagi PPS. Penggunaan kaedah ini lazimnya akan menghasilkan suatu sistem persamaan linear yang besar dan jarang. Kaedah-kaedah lelaran yang biasa digunakan untuk menyelesaikan sistem sebegini adalah seperti Jacobi, GS (Gauss-Seidel) dan SOR (Successive Over Relaxation). Tetapi keberkesanan kaedah-kaedah sebegini terlalu bergantung kepada sifat dominan pepenjuru matriks koefisien sistem yang terhasil. Lantaran itu, penyelidik-penyelidik mula beralih kepada kaedah-kaedah unjuran yang tidak memerlukan pengetahuan mengenai sifat-sifat dominan pepenjuru bagi matriks koefisien sistem tersebut. Kaedah subruang Krylov adalah salah satu jenis kaedah unjuran dan ia juga adalah kaedah lelaran yang bebas-parameter. Lazimnya sistem bersaiz besar yang diselesaikan dengan kaedah subruang Krylov akan diaplikasikan dengan suatu matriks berprasyarat untuk mempercepatkan lagi penumpuan. Sistem persamaan linear yang diaplikasikan matriks berprasyarat adalah diubahsuai kepada satu sistem lain yang mempunyai makna serta penyelesaian yang setara dengan sistem asal, tetapi mempunyai ciri-ciri spektrum yang lebih baik. Dalam tesis ini, kita mempertimbangkan empat kaedah subruang Krylov berprasyarat iaitu kaedah CG (Conjugate Gradient) berprasyarat, Bi-CGSTAB (Bi-Conjugate Gradient Stabilized) berprasyarat, GMRES (Generalized Minimal Residual) berprasyarat dan TFQMR (Transpose-Free Quasi-Minimal Residual) berprasyarat yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang

timbul dalam skema lelaran titik dan berkumpulan yang berasaskan pendiskretan lima titik biasa dan lima titik putaran. Khususnya, kaedah lelaran berkumpulan yang dikaji adalah skema lelaran Kumpulan Tak Tersirat (Explicit Group/EG) dan kaedah Kumpulan Nyah Pasangan Tak Tersirat (Explicit Decoupled Group/EDG). Isu utama dalam kaedah-kaedah sebegini ialah mengenai pemilihan prasyarat yang sesuai digunakan bagi sistem yang dihasilkan. Objektif tesis ini ialah untuk mengkaji pelaksanaan bagi kaedah-kaedah subruang Krylov yang diprasyaratkan dengan pemfaktoran ILU untuk kaedah lelaran titik dan pengubahsuaian pemfaktoran D-ILU bagi versi blok 2×2 untuk kaedah lelaran berkumpulan yang masing-masing berdasarkan kepada sama ada rumus lima titik biasa ataupun rumus lima titik putaran. Kita akan selidik keberkesanan dan keupayaan kaedah-kaedah berprasyarat tersebut dalam usaha meningkatkan lagi kadar penumpuan bagi kaedah-kaedah asalnya.

Dalam tesis ini, masalah Poisson dan perolakan-resapan dalam dua dimensi telah dijadikan sebagai ujian masalah untuk mengesahkan keberkesanan kaedah-kaedah lelaran yang dikaji. Kita menjalankan ujikaji berangka ke atas kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat serta kaedah asal masing-masing bagi membandingkan keputusan antara kaedah-kaedah tersebut. Akhir sekali, kompleksiti pengiraan dan nombor bersyarat akan dianalisiskan untuk mengesahkan keputusan berangka yang diperoleh.

PRECONDITIONED ITERATIVE METHODS IN THE SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

Numerical methods are techniques for finding approximate solutions to partial differential equations (PDEs) which arise from fluid dynamics and thermodynamics problems. Since the analytical solutions of the problems in these areas are difficult to obtain, the finite difference method is one of the existing methods which is capable of generating numerical solutions for the PDEs. Such methods will generally lead to a large and sparse linear system. Well-known iterative methods in solving this type of system are Jacobi, Gauss-Seidel (GS) and Successive Over Relaxation (SOR). However, the effectiveness of these methods is highly dependent on the diagonally dominant property of the resulting system coefficient matrix. Thus, researchers begin to shift to projection methods which do not require any knowledge of the diagonally dominant properties of the system coefficient matrix. Krylov subspace method is a projection method and it also known to be parameter-free iterative methods. Usually, large size systems which solved by the Krylov subspace methods are applied with a preconditioned matrix to further accelerate the convergence. A linear system of equations applied with a preconditioned matrix is modified to a different system which has the same solution as the original system but has more favourable spectral properties. In this thesis, we consider four preconditioned Krylov subspace methods, such as preconditioned Conjugate Gradient (CG), preconditioned Bi-Conjugate Gradient Stabilized (Bi-CGSTAB), preconditioned Generalized Minimal Residual (GMRES) and preconditioned Transpose-Free Quasi-Minimal Residual (TFQMR) which are applied to solve the linear system obtained from the point and group iterative schemes derived from the standard five-point and rotated five-point discretizations. Particularly, the group iterative methods that are under study are the Explicit Group (EG) method and Explicit Decoupled Group (EDG) method. The main issue in such

methods is in choosing the preconditioners which are suitable to be used for the resulting system. The main objective of this thesis is to study the performance of Krylov subspace methods preconditioned by an incomplete LU (ILU) factorization on point iterative methods and a modified 2×2 block version of a diagonal-incomplete LU (D-ILU) factorization on group iterative methods which are derived from either the standard five-point formula or the rotated five-point formula. We will investigate whether these preconditioners are capable of improving the convergence rates of the original methods.

In this thesis, a two-dimensional Poisson and convection-diffusion problems have been used as test problems to study the efficiency of the iterative methods. We perform numerical experiments on preconditioned Krylov subspace methods and the original methods, to compare the results between them. Finally, the computational complexity and the condition number are analysed to verify our numerical results.

BAB 1
PENGENALAN

1.1 Latarbelakang

Kebanyakan masalah fizikal boleh diperihalkan secara umum oleh persamaan pembezaan separa (PPS). Misalnya, persamaan yang timbul dalam ilmu fizik seperti dinamik bendalir, elektrik, magnetik, mekanik, optik dan pengaliran haba adalah PPS. Penyelesaian analitik bagi PPS biasanya adalah terlalu rumit atau tidak wujud. Jadi kaedah berangka digunakan untuk mencari penghampiran bagi penyelesaian PPS tersebut, iaitu dengan menggantikan persamaan pembezaan dengan persamaan hampiran dan menyelesaikan persamaan hampiran yang lebih ringkas ini. Penyelesaian sedemikian dikenali sebagai penyelesaian berangka. Kaedah beza terhingga digunakan untuk menggantikan terbitan separa dalam PPS dengan beza terhingga, jadi kita dapat menghampirkan penyelesaian kepada PPS dengan menyelesaikan persamaan beza terhingga tersebut. Kaedah ini serta semua konsep matematik asas yang diperlukan akan dibincangkan dalam Bab 2.

Dengan perkembangan teknologi berkomputer yang pesat dan kaedah berangka yang lebih canggih pada masa kini, ahli sains dan ahli jurutera telah mula menyelesaikan banyak lagi masalah yang rumit dan mencabarkan. Masalah akan bertambah rumit jika masalah tersebut melibatkan semakin banyak pembolehubah.

Kaedah terus dan kaedah lelaran merupakan dua pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang terjana daripada pendiskretan beza terhingga. Perkembangan teknologi berkomputer membolehkan kedua-dua kaedah ini boleh ditulis dalam aturcara komputer. Jika matriks yang terlibat adalah matriks jarang, maka penggunaan kaedah terus akan menukarkan kebanyakan pemasukan sifar kepada bukan sifar. Hal ini mengakibatkan storan komputer yang banyak diperlukan lalu meningkatkan kos pengiraan. Jadi, kaedah lelaran lebih memanfaatkan dengan kehadiran matriks jarang. Bagi kaedah lelaran, suatu anggaran awal secara sebarangan akan digunakan untuk memulakan proses lelaran. Kemudian rumus lelaran tertentu digunakan untuk mengira suatu anggaran baru. Pengiraan anggaran baru akan dinilai secara berterusan sehingga suatu kejituan yang ditetapkan tercapai (ataupun kriteria penumpuan ditemui). Kaedah Jacobi, kaedah GS (Gauss-Seidel method) dan kaedah pengenduran berlebihan berturut-turut (Successive Over Relaxation method/SOR) adalah contoh-contoh kaedah lelaran yang klasik (Smith, 1985). Dalam tesis ini, kaedah-kaedah subruang Krylov iaitu kaedah CG (Conjugate Gradient), kaedah Bi-CGSTAB (Bi-Conjugate Gradient Stabilized) (van der Vorst, 1992), kaedah GMRES (Generalized Minimal Residual) (Saad dan Schultz, 1986) dan kaedah TFQMR (Transpose-Free Quasi-Minimal Residual) (Freund, 1993) akan diselidik. Kaedah subruang Krylov merupakan kaedah lelaran yang bebas-parameter iaitu kaedah jenis ini adalah bebas daripada memilih parameter yang tidak sama seperti dalam kaedah SOR (Evans, 1983).

Menurut Zhang (2000), kaedah Bi-CGSTAB, kaedah GMRES dan kaedah TFQMR adalah antara kaedah-kaedah lelaran yang sesuai untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang melibatkan matriks tak simetri. Kaedah CG, kaedah Bi-CGSTAB, kaedah GMRES dan kaedah TFQMR akan dikaji dalam Bab 3. Kajian kaedah-kaedah sedemikian akan dilaksanakan ke atas persamaan Poisson dan persamaan perolakan-resapan yang melibatkan domain penyelesaian berbentuk segiempat sama.

Penyelesaian hampir bagi PPS yang efisien adalah teknik penggabungan bagi dua kaedah lelaran, iaitu kaedah-kaedah subruang Krylov dengan kaedah berprasyarat. Kaedah berprasyarat ialah suatu kaedah pengubahsuaian yang dilakukan terhadap sistem persamaan linear dengan menjadikan sistem tersebut lebih mudah diselesaikan secara lelaran tanpa mengubah penyelesaiannya yang asal.

Kaedah-kaedah lelaran selalu hanya perlu menjalankan operasi mudah, seperti hasil darab matriks dengan vektor dan aritmetik vektor. Oleh kerana storan komputer adalah terhad, maka kita hanya perlu menyimpankan pemasukan-pemasukan bukan sifar bagi matriks jarang sahaja dan juga vektor-vektor yang terlibat. Sebagai akibatnya, susunan bagi matriks, sebagai contohnya, kejarangan, boleh dipergunakan dengan sebaik-baiknya. Sebaliknya, kadar penumpuan bagi kaedah lelaran mungkin lambat. Cara piawai untuk meningkatkan kecekapan bagi kaedah lelaran adalah teknik berprasyarat, iaitu satu teknik berkuasa untuk memperbaiki nombor bersyarat bagi sistem persamaan linear yang bergabung dengan matriks berprasyarat yang sesuai. Pada hakikatnya, perkembangan keberkesanan teknik berprasyarat membantu kaedah-kaedah lelaran menjadi popular.

1.2 Kaedah lelaran titik dan berkumpulan

Kaedah lima titik biasa ialah kaedah lelaran yang paling awal diperkenalkan. Kaedah ini sangat popular dalam penyelesaian PPS jenis eliptik seperti persamaan Poisson dan persamaan Laplace. Kembangan siri Taylor di sekitar titik yang dikaji akan diguna untuk membangunkan rumus bagi kaedah ini. Rumus lima titik biasa merupakan rumus berangka yang digunakan untuk kaedah lima titik biasa menghampirkan setiap titik dalam domain penyelesaian yang dibahagikan kepada petak-petak segiempat sama kecil. Jadi suatu sistem persamaan linear akan terhasil dan ia boleh dituliskan semula dalam bentuk matriks. Seterusnya matriks tersebut akan diaplikasikan dengan kaedah-kaedah subruang Krylov. Selain rumus lima titik biasa, rumus lima titik putaran juga boleh dibangunkan berpandukan siri Taylor dua dimensi. Turutan titik-titik grid dalam domain penyelesaian bagi kaedah lima titik putaran boleh disusun mengikut tertib dari atas ke bawah, kiri ke kanan ataupun secara berselang-seli. Corak penyusunan titik-titik grid dalam domain akan menghasilkan sistem persamaan linear yang berlainan lalu menjanakan pelbagai jenis bentuk matriks. Sama seperti kaedah lima titik biasa, matriks yang dijana oleh kaedah lima titik putaran juga akan diimplementasikan kaedah-kaedah subruang Krylov.

Kaedah lima titik biasa dan kaedah lima titik putaran merupakan kaedah-kaedah lelaran titik iaitu menilaikan titik-titik dalam domain secara titik demi titik (Dahlquist dan Bjorck, 1974; Vichnevetsky, 1981). Selain itu, kita juga boleh menilai titik-titik dalam domain secara blok demi blok. Satu blok mungkin terdiri daripada kumpulan titik-titik yang berjiranan ataupun beberapa titik segaris. Masa pelaksanaan komputer bagi kaedah lelaran blok biasanya lebih singkat berbanding kaedah lelaran titik kerana ia boleh menilaikan titik-titik dalam sesuatu blok secara serentak tetapi ia akan melibatkan sistem persamaan linear yang lebih rumit. Teknik lelaran berkumpulan yang dipopularkan oleh Yousif dan Evans (1986) melalui pengumpulan empat titik yang berjiranan dalam satu kumpulan dan titik-titik dalam kumpulan tersebut dihampirkan dengan rumus lima titik biasa disebut sebagai kaedah kumpulan tak tersirat (Explicit Group Method/EG). Nilai titik-titik dikirakan secara kumpulan demi kumpulan sehingga penumpuan tercapai. Kaedah EG yang akan dikaji dalam tesis ini adalah dua titik yang berjiranan akan dikumpulkan sebagai satu kumpulan. Pada tahun 1991, satu lagi kaedah lelaran berkumpulan yang dinamakan kaedah kumpulan nyah pasangan tak tersirat (Explicit Decoupled Group Method/EDG) telah diperkenalkan oleh A.R.Abdullah dalam menyelesaikan masalah berkenaan dengan persamaan Poisson dua dimensi (Abdullah, 1991). Susunan titik-titik grid bagi kaedah ini adalah sama seperti kaedah lima titik putaran iaitu secara berselang-seli. Dalam kaedah ini dua titik yang berjiranan dikumpulkan sebagai satu kumpulan dan rumus lima titik putaran akan diguna untuk menghampirkan setiap titik dalam kumpulan tersebut supaya suatu sistem persamaan linear terhasil. Serupa dengan kaedah-kaedah lelaran titik, matriks yang dihasilkan oleh kaedah EG dan kaedah EDG juga akan diaplikasikan kaedah-kaedah subruang Krylov.

Kaedah-kaedah lelaran titik dan berkumpulan tersebut akan dibincangkan dengan lebih mendalam dalam Bab 4 bagi persamaan Poisson dan dalam Bab 5 pula bagi persamaan perolakan-resapan.

1.3 Kaedah berprasyarat

Kaedah berprasyarat adalah berdasarkan pengubahsuaian sistem persamaan asal kepada sistem persamaan baru di mana pengubahsuaian sistem tersebut akan menghasilkan kadar penumpuan yang lebih baik berbanding sistem persamaan asal. Kaedah ILU (incomplete LU) (Saad, 2003), kaedah MILU (Modified ILU) (Saad, 2003), kaedah ILUM (multi-elimination ILU) (Saad, 1996), kaedah ILUT (dual threshold incomplete ILU) (Saad, 1994), kaedah BILUM (block versions of multi-elimination and multi-level ILU) (Saad dan Zhang, 1999a) dan kaedah BILUTM (domain-based multilevel block ILUT) (Saad dan Zhang, 1999b) ialah antara kaedah-kaedah berprasyarat yang mampu memecutkan penumpuan kaedah-kaedah lelaran seperti kaedah-kaedah subruang Krylov. Kaedah-kaedah berprasyarat ini melibatkan penghampiran matriks asal dengan matriks baru yang mempunyai ciri-ciri tertentu yang sama seperti matriks asal. Kaedah ILU, kaedah MILU, kaedah ILUM dan kaedah ILUT merupakan kaedah berprasyarat yang digunakan bersama dengan kaedah-kaedah lelaran titik manakala kaedah BILUM dan kaedah BILUTM akan digunakan bersama dengan kaedah-kaedah lelaran blok. Selain boleh diaplikasi terhadap sistem persamaan linear yang timbul dalam penghampiran beza memusat iaitu bertertib dua, kaedah berprasyarat juga boleh diimplementasi terhadap sistem persamaan linear yang timbul dalam penghampiran beza terhingga bertertib empat dalam penyelesaian PPS jenis eliptik (Bhuruth *et al*., 2002; Dehghan dan Molavi-Arabshahi, 2007; Molavi-Arabshahi dan Dehghan, 2007). Manakala dalam tesis ini, kita hanya mempertimbangkan kes kaedah-kaedah berprasyarat yang diaplikasi terhadap sistem yang timbul dalam penghampiran beza memusat.

Kaedah berprasyarat yang diperkenalkan oleh Evans (1983) pula melibatkan sistem persamaan asal dibahagikan kepada matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah dengan menggunakan kaedah penghapusan Gauss dan kemudiannya sistem baru yang dihasil itu akan diselesaikan dengan proses penggantian balik. Kaedah berprasyarat sedemikian menyebabkan sistem asal lebih mudah diselesaikan kerana penyelesaian bagi matriks segitiga adalah jauh lebih senang berbanding matriks asal terutamanya bagi sistem yang besar dan padat. Bagi sistem yang besar tetapi jarang, kaedah ILU lebih sesuai dipilihkan kerana kaedah ini menjamin kejarangan matriks baru yang dijana itu iaitu matriks tersebut mempunyai kedudukan pemasukan-pemasukan sifar yang serupa dengan matriks asal. Jadi matriks baru tersebut mempunyai jumlah pemasukan-pemasukan bukan sifar yang sama dengan matriks asal. Hanya kaedah ILU sahaja akan dirangkumi dalam skop penyelidikan tesis ini untuk kaedah lelaran titik manakala bagi kaedah lelaran berkumpulan pula, kaedah pengubahsuaian pemfaktoran D-ILU bagi versi blok 2×2 yang diperkenalkan dalam Bab 3 akan digunakan.

Kajian tentang kaedah berprasyarat yang boleh meningkatkan kadar penumpuan bagi kaedah-kaedah subruang Krylov seperti kaedah CG, kaedah Bi-CGSTAB, kaedah GMRES dan kaedah TFQMR akan dibincangkan dalam tesis ini. Kaedah berprasyarat sedemikian diaplikasikan dengan mendarabkan matriks prasyarat ke sistem persamaan linear asal dan kemudiannya diimplementasikan dengan kaedah-kaedah subruang Krylov lalu menghasilkan kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat. Kajian ini merupakan isu utama dalam Bab 6.

Kaedah subruang Krylov berprasyarat yang diperkenalkan oleh Chen *et al*. (1997) adalah kaedah TFQMR berprasyarat. Dalam hasil kerja tersebut, kaedah-kaedah berprasyarat yang digunakan bersama dengan kaedah TFQMR ialah kaedah ILU, kaedah MILU, kaedah BILU (Block ILU) dan kaedah MBILU (Block MILU). Selain itu, algoritma bagi kaedah TFQMR berprasyarat juga dipaparkan dalam kerja tersebut. Pada tahun 2004, Chen dan Sheu telah menunjukkan penggabungan kaedah-kaedah subruang Krylov seperti kaedah CGS (Conjugate Gradient Square) dan kaedah Bi-CGSTAB dengan kaedah-kaedah berprasyarat iaitu kaedah ILU dan kaedah MILU lalu menghasilkan kaedah CGS berprasyarat dan kaedah Bi-CGSTAB berprasyarat. Tambahan pula, algoritma bagi kaedah CGS berprasyarat dan kaedah Bi-CGSTAB berprasyarat juga terdapat dalam hasil kerja tersebut. Kaedah GMRES berprasyarat, kaedah CGS berprasyarat dan kaedah Bi-CGSTAB berprasyarat telah dipopularkan oleh Zhang dan Zhang (2004). Kaedah-kaedah subruang Krylov tersebut telah bergabung dengan kaedah ILU dan algoritma bagi kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat tersebut juga telah ditunjukkan. Kadar penumpuan bagi kaedah subruang Krylov akan ditentukan oleh nombor bersyarat bagi sistem persamaan linear yang terlibat dan nombor bersyarat pula akan ditentukan oleh nilai eigen maksimum serta nilai eigen minimum bagi matriks yang terlibat seperti yang diberikan dalam Zhang dan Zhang (2004). Dalam Bab 7, ujikaji berangka akan dijalankan terlebih dahulu untuk menguji keberkesanan kaedah-kaedah subruang Krylov dan kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat manakala analisis kompleksiti pengiraan serta nilai eigen akan ditunjukkan kemudian untuk mengesahkan lagi keputusan ujikaji berangka yang didapati.

Pada masa kini ramai penyelidik masih berusaha mencari suatu kaedah berprasyarat yang berkesan dan mudah diimplementasikan untuk kaedah-kaedah subruang Krylov. Pemilihan kaedah berprasyarat yang paling sesuai masih merupakan satu topik perdebatan yang hangat bagi para penyelidik. Mencari satu kaedah berprasyarat yang sesuai diaplikasikan terhadap algoritma bagi kaedah subruang Krylov seperti kaedah GMRES dengan mengurangkan masa pengiraannya (iaitu menjadikannya lebih efisien) merupakan satu cabaran bagi para penyelidik. Selain itu, algoritma tersebut juga berfaedah jika kaedah berprasyarat tersebut mengurangkan permintaannya terhadap ingatan komputer.

1.4 Masalah penyelidikan

Kaedah-kaedah subruang Krylov merupakan salah satu jenis kaedah lelaran yang efektif dan popular dalam penyelesaian sistem persamaan linear yang besar serta jarang. Walaupun kaedah-kaedah ini dapat berfungsi dengan baik, tetapi ia juga mampu menjadi lebih efisien sekiranya ia digabungkan dengan kaedah berprasyarat yang sesuai (Saad, 2003; Xiao dan Chen, 2007). Tetapi sesuatu kaedah berprasyarat itu tidak semestinya sesuai digabungkan dengan semua kaedah subruang Krylov. Sesuatu kaedah berprasyarat mungkin hanya sesuai bergabung dengan kaedah-kaedah subruang Krylov yang tertentu sahaja. Jadi kajian untuk memilih dan membangunkan kaedah berprasyarat yang sesuai bagi sesuatu sistem yang terhasil daripada pendiskretan sesuatu kaedah beza terhingga itu merupakan satu bidang yang mencabar dan harus diterokai.

1.5 Skop penyelidikan dan objektif

Objektif tesis ini ialah untuk mengkaji pelaksanaan bagi kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat terhadap kaedah-kaedah lelaran titik dan berkumpulan yang diterbitkan daripada rumus lima titik biasa dan rumus lima titik putaran. Kaedah-kaedah subruang Krylov yang dipertimbangkan dalam tesis ini ialah kaedah CG, kaedah Bi-CGSTAB, kaedah GMRES dan kaedah TFQMR. Kita ingin selidik sama ada kaedah-kaedah subruang Krylov berprasyarat tersebut berkebolehan meningkatkan lagi kadar penumpuan bagi kaedah-kaedah asalnya. Kaedah berprasyarat yang diaplikasikan terhadap kaedah lelaran titik dan berkumpulan masing-masing adalah kaedah ILU dan kaedah pengubahsuaian pemfaktoran D-ILU bagi versi blok 2×2. Kaedah pemfaktoran D-ILU bagi versi blok asal ialah satu kaedah yang memerlukan songsangan submatriks dalam pepenjuru bagi sesuatu matriks blok. Jika matriks blok tersebut berperingkat $n^2 \times n^2$, maka submatriks-submatriks dalamnya adalah berperingkat $n \times n$. Manakala submatriks-submatriks dalam matriks blok bagi kaedah pengubahsuaian pemfaktoran D-ILU bagi versi blok 2×2 pula hanya berperingkat 2×2.

BAB 2
KONSEP-KONSEP ASAS MATEMATIK

2.1 Persamaan pembezaan separa

Persamaan pembezaan separa (disingkatkan sebagai PPS) adalah persamaan yang mengandungi terbitan separa sesuatu fungsi. Persamaan pembezaan biasa merupakan persamaan yang mengandungi suatu fungsi yang belum diketahui dan fungsi tersebut hanya bergantung kepada satu pembolehubah tak bersandar sahaja, manakala PPS merupakan persamaan yang mengandungi suatu fungsi yang belum diketahui dan fungsi tersebut bergantung kepada dua atau lebih pembolehubah tak bersandar. Suatu PPS boleh diungkap dalam bentuk am seperti

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y},\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2},\frac{\partial^3 u}{\partial y^3},\cdots\right)=0 \qquad [2.1.1]$$

Peringkat bagi PPS ialah peringkat terbitan separa yang tertinggi dalam PPS itu. PPS adalah sama ada linear ataupun tak linear. Persamaan [2.1.1] dikatakan linear jika pembolehubah bersandar *u* dan semua terbitannya adalah linear iaitu berdarjah satu, misalnya pembolehubah bersandar *u* dan semua terbitannya tidak didarabkan dengan *u* atau tidak dikuasa duakan.

Kebanyakan masalah fizikal diwakili oleh PPS peringkat dua yang linear dalam dua pembolehubah tak bersandar *x* dan *y* adalah persamaan berbentuk

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y)$$

[2.1.2]

dengan A, B, C, D, E, F dan G adalah pemalar ataupun fungsi yang bebas daripada *u* iaitu tidak didarabkan dengan *u*. Persamaan [2.1.2] dikatakan homogen sekiranya *G(x,y)* adalah sifar bagi semua nilai *x* dan *y* .

Persamaan [2.1.2] boleh dikelaskan kepada tiga jenis asas persamaan linear iaitu

a) PPS jenis eliptik jika PPS tersebut memenuhi syarat $B^2 - 4AC < 0$. Contohnya

i. Persamaan Laplace, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

ii. Persamaan Poisson, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y)$

b) PPS jenis parabolik jika PPS tersebut memenuhi syarat $B^2 - 4AC = 0$. Contohnya

i. Persamaan haba, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan α^2 adalah pemalar.

ii. Persamaan perolakan-resapan, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \dfrac{\partial u}{\partial x}$ dengan α^2 dan β adalah pemalar.

c) PPS jenis hiperbolik jika PPS tersebut memenuhi syarat $B^2 - 4AC > 0$. Contohnya

i. Persamaan gelombang, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan β^2 adalah pemalar.

Persamaan [2.1.2] dikatakan mempunyai pekali malar jika pekali A, B, C, D, E dan F dalam persamaan [2.1.2] adalah malar. Jika tidak, persamaan [2.1.2] dikatakan mempunyai pekali pembolehubah. Contohnya persamaan linear $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dengan pekali pembolehubah juga berbentuk [2.1.2], dengan $B^2 - 4AC = -4x$ dan seterusnya persamaan linear ini dikelaskan kepada

i. PPS jenis eliptik jika $x > 0$,

ii. PPS jenis parabolik jika $x = 0$,

iii. PPS jenis hiperbolik jika $x < 0$.

Bagi persamaan dengan pekali pembolehubah, keadaan boleh berubah dari satu titik ke satu titik lain dalam domain tertentu.

Jenis persamaan [2.1.2] sama ada eliptik, parabolik atau hiperbolik hanya bergantung kepada pekali terbitan kedua dan langsung tidak ada kaitan dengan pekali terbitan pertama, u atau pekali tak homogen ($G(x,y) \neq 0$).

Penyelesaian am bagi PPS melibatkan fungsi sebarangan iaitu terdapat penyelesaian yang tak terhingga, dan penyelesaian khusus hanya boleh diperolehi dengan menentukan syarat sempadan. Secara amnya, terdapat tiga bentuk utama bagi syarat sempadan, iaitu

a) syarat sempadan Dirichlet dimana nilai-nilai fungsi u yang tidak diketahui itu akan diberikan bagi semua titik pada sempadan domain.

$$u(0,t) = K_1 \qquad\qquad u(L,t) = K_2$$

b) syarat sempadan Neumann dimana nilai-nilai terbitan normal bagi fungsi u akan diberikan pada sempadan domain.

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = K_1 \qquad\qquad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = K_2$$

c) syarat sempadan Robins merupakan campuran syarat sempadan Dirichlet dan syarat sempadan Neumann dimana nilai-nilai fungsi u dan terbitan normalnya akan diberikan pada sempadan domain.

$$\alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta_1 u(0,t) = K_1 \qquad\qquad \alpha_2 \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \beta_2 u(L,t) = K_2$$

d) syarat awal Cauchy dimana nilai-nilai fungsi u dan terbitannya akan diberikan pada masa awal, $t = 0$.

$$u(x,0) = K_1 \qquad\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = K_2$$

2.2 Aljabar matriks

Dalam pelbagai masalah sains atau kejuruteraan, analisis linear sering digunakan dan masalah matematik yang muncul biasanya melibatkan beberapa persamaan linear yang harus diselesaikan secara serentak. Beberapa persamaan linear yang harus diselesaikan secara serentak dinamakan sebagai sistem persamaan linear atau sistem linear. Secara am, suatu sistem persamaan linear dengan n pembolehubah dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad [2.2.1]$$

dengan a_{ij} dan b_i bagi $1 \leq i, j \leq n$. Pekali-pekali a_{ij} dan b_i adalah nyata atau kompleks dan nilai-nilai x_1, x_2, ... , x_n yang memenuhi semua persamaan dalam sistem persamaan [2.2.1] dikenali sebagai pembolehubah ataupun anu.

Sistem persamaan [2.2.1] dapat dituliskan semula dalam bentuk matriks yang ringkas iaitu

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad [2.2.2]$$

dengan A adalah suatu matriks segiempat sama yang berperingkat n ($A_{n\times n}$), $\underline{x}$ dan $\underline{b}$ masing-masing adalah vektor lajur berperingkat n.

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad [2.2.3]$$

Pemasukan matriks A diwakili oleh unsur-unsur a_{ij} , dengan i mewakili bilangan baris dan j mewakili bilangan lajur.

Dalam tesis ini, semua matriks dianggap berbentuk segiempat sama berperingkat n kecuali matriks yang dinyatakan itu sahaja. Huruf besar mewakili semua matriks manakala huruf kecil menandakan pemasukan bagi matriks.

Dua matriks A dan B dikatakan sama jika kedua-duanya berperingkat sama dan nilai bagi setiap pemasukan masing-masing yang sepadan juga sama, iaitu

$$A = B \text{ jika } a_{ij} = b_{ij} \text{ untuk semua } i \text{ dan } j.$$

Matriks A dikatakan positif jika $a_{ij} > 0$ bagi semua $1 \le i, j \le n$ dan matriks A dikatakan tak negatif jika $a_{ij} \ge 0$ bagi semua $1 \le i, j \le n$. Matriks A dikenali sebagai matriks sifar jika semua pemasukannya bernilai sifar, iaitu $a_{ij} = 0$ bagi semua $1 \le i, j \le n$.

Matriks A akan digelar sebagai matriks identiti jika $a_{ii} = 1$ bagi semua $1 \le i \le n$ dan $a_{ij} = 0$ bagi semua $1 \le i, j \le n$ dengan $i \ne j$. Matriks identiti ditandakan dengan I.

Persamaan [2.2.2] dikatakan mempunyai penyelesaian unik jika dan hanya jika matriks A adalah tak singular. Matriks B akan digelar sebagai songsangan bagi A jika $AB = BA = I$, dengan matriks A dan B masing-masing adalah matriks segiempat sama. Songsangan bagi A akan ditandakan dengan A^{-1}. Jika A^{-1} wujud, maka matriks A dikatakan tak singular. Sekiranya A^{-1} tak wujud, maka matriks A akan dikatakan singular. Kedua-dua pernyataan diatas telah menunjukkan bahawa bukannya semua matriks mempunyai songsangan.

Jika matriks A dan B masing-masing adalah matriks segiempat sama yang boleh disongsangkan, maka matriks AB juga boleh disongsangkan. Songsangan bagi matriks AB boleh ditulis sebagai $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Transposisi bagi matriks A adalah suatu matriks baru dijanakan dengan saling tukar setiap pemasukan a_{ij} kepada a_{ji} bagi semua $1 \le i, j \le n$. Tatatanda bagi transposisi matriks A adalah A^T, dimana $A^T = [a_{ji}]$.

Takrifan 2.2.1

Suatu matriks $A = [a_{ij}]$ berperingkat n adalah

a) simetri jika $A^T = A$

b) simetri pencong jika $A^T = -A$

c) tentu positif jika $\underline{x}^T A\underline{x} > 0$ dengan $\underline{x} \neq 0$, $\underline{x} \in \mathrm{R}^n$

d) matriks pepenjuru jika $a_{ij} = 0$ bagi semua $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i \neq j$

e) matriks jalur jika $a_{ij} = 0$ bagi semua $1 \leq i, j \leq n$ dengan $i > j + p$ dan $j > i + q$ (lebar jalur bagi matriks jalur dapat ditentukan dengan rumus $r = p + q + 1$)

f) matriks segitiga bawah jika $a_{ij} = 0$ bagi $i < j$ (rujuk Rajah 2.2.1(a))

matriks segitiga bawah tegas jika $a_{ij} = 0$ bagi $i \leq j$ (rujuk Rajah 2.2.1(b))

g) matriks segitiga atas jika $a_{ij} = 0$ bagi $i > j$ (rujuk Rajah 2.2.2(a))

matriks segitiga atas tegas jika $a_{ij} = 0$ bagi $i \geq j$ (rujuk Rajah 2.2.2(b))

h) matriks jarang jika kebanyakan pemasukannya adalah sifar

i) matriks tumpat jika kebanyakan pemasukannya adalah bukan sifar

j) matriks Hessenberg atas jika $a_{ij} = 0$ bagi $i > j + 1$ (rujuk Rajah 2.2.3)

k) dominan pepenjuru tegas jika nilai mutlak setiap pemasukan pepenjuru utama bagi A lebih besar daripada jumlah nilai mutlak pemasukan-pemasukan lain yang sebaris dengannya, iaitu $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ bagi setiap $1 \leq i \leq n$

dominan pepenjuru jika $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ bagi setiap $1 \leq i \leq n$

tak dominan pepenjuru jika $|a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ bagi setiap $1 \leq i \leq n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.1(a): Matriks segitiga bawah

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.1(b): Matriks segitiga bawah tegas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ & & a_{33} & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.2(a): Matriks segitiga atas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.2(b): Matriks segitiga atas tegas

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.3: Matriks Hessenberg atas

Bagi matriks jalur, jika $p = q = 1$, maka matriks A yang terhasil itu akan digelar sebagai matriks tiga pepenjuru. Matriks tiga pepenjuru akan ditunjukkan dalam Rajah 2.2.4.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.4: Matriks tiga pepenjuru

Suatu matriks A yang pemasukannya terdiri daripada submatriks yang lebih kecil disebut sebagai matriks blok. Pemasukan matriks blok ditandakan sebagai A_{ij} bagi semua $1 \leq i, j \leq n$. Setiap A_{ij} merupakan submatriks yang tidak semestinya berperingkat sama. Matriks blok ditunjukkan dalam Rajah 2.2.5.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Rajah 2.2.5: Matriks blok

<u>Takrifan 2.2.2</u>

Suatu matriks A ialah

a) matriks blok pepenjuru jika $A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_n \end{pmatrix}$ dengan D_i bagi semua $1 \leq i \leq n$, adalah matriks pepenjuru yang tidak semestinya berperingkat sama.

b) matriks blok tiga pepenjuru jika $A = \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & E_3 & D_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & F_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & E_n & D_n \end{pmatrix}$ dengan D_i bagi semua $1 \leq i \leq n$, adalah matriks pepenjuru yang tidak semestinya berperingkat sama, E_i dan F_i bagi semua $1 \leq i \leq n$, adalah sebarang matriks segiempat tepat.

c) matriks blok segitiga atas jika $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix}$ dengan $A_{ij} = 0$ bagi $i > j$.

Penentu bagi matriks A ditandakan sebagai pen(A) ataupun $|A|$. Jika A berperingkat 1 dan a_{11} merupakan pemasukan tunggalnya, maka $|A| = a_{11}$. Jika A berperingkat 2 dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, maka $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Penentu bagi submatriks A_{ij} ditandakan sebagai pen(A_{ij}) ataupun $|A_{ij}|$. Sekiranya A berperingkat n, kofaktor ke-(i,j) bagi A ditandakan sebagai C_{ij} yang dapat dikirakan dengan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| \ , \ 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.2.4}$$

Untuk mendapatkan nilai bagi $|A_{ij}|$, kita akan membatalkan baris yang sepadan dengan i dan lajur yang sepadan dengan j dalam matriks A. $|A|$ boleh dikirakan dengan perkembangan kofaktor sama ada melintang suatu baris atau menurun suatu lajur. Maka $|A|$ dapat diungkap dalam dua bentuk iaitu

a) perkembangan kofaktor melintang baris ke-i dengan menggunakan persamaan [2.2.4] adalah

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq n. \tag{2.2.5}$$

b) perkembangan kofaktor menurun lajur ke-j dengan menggunakan persamaan [2.2.4] adalah

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \ , \ 1 \leq j \leq n. \tag{2.2.6}$$

Kofaktor-kofaktor bagi A dapat disusun semula dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Adjoin A merupakan transposisi bagi matriks [2.2.7] dan ia ditandakan dengan *adj*(A). Songsangan matriks A berperingkat n dapat ditulis sebagai $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$.

Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai songsangan. Sekiranya A mempunyai songsangan, songsangannya adalah unik, jadi hasil darab bagi matriks A dengan songsangannya mesti memperoleh matriks identiti, I iaitu

$$A^{-1}A = I \text{ dan } AA^{-1} = I .$$

Jika A adalah tak singular, maka sistem persamaan [2.2.2] akan menghasilkan suatu penyelesaian unik kerana A^{-1} wujud. Kita akan mendapat suatu penyelesaian unik dalam bentuk

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b} . \qquad [2.2.8]$$

Nilai skalar λ yang memenuhi persamaan

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad [2.2.9]$$

dengan $\underline{x} \neq 0$ dikenali sebagai nilai eigen bagi matriks A. Vektor eigen bagi A yang sepadan dengan nilai eigen λ adalah vektor lajur $\underline{x}$ yang memenuhi persamaan [2.2.9]. Pasangan $(\lambda, \underline{x})$ akan dipanggil pasangan eigen bagi A. Persamaan [2.2.9] juga boleh dituliskan semula dalam bentuk

$$(\lambda I - A)\underline{x} = 0 \qquad [2.2.10]$$

dengan I ialah matriks identiti berperingkat n. Sekiranya matriks $(\lambda I - A)$ adalah singular, iaitu matriks $(\lambda I - A)$ tidak mempunyai songsangan, maka penyelesaiannya adalah tidak remeh kerana $\underline{x} \neq 0$.

λ adalah nilai eigen bagi suatu matriks *A* jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0 . \qquad [2.2.11]$$

Persamaan [2.2.11] dipanggil persamaan cirian. Polinomial cirian adalah suatu polinomial berdarjah *n* dalam λ yang dijana daripada persamaan [2.2.11] yang telah dikembangkan. Penyelesaian persamaan [2.2.11] akan mendapat nilai-nilai eigen bagi *A*.

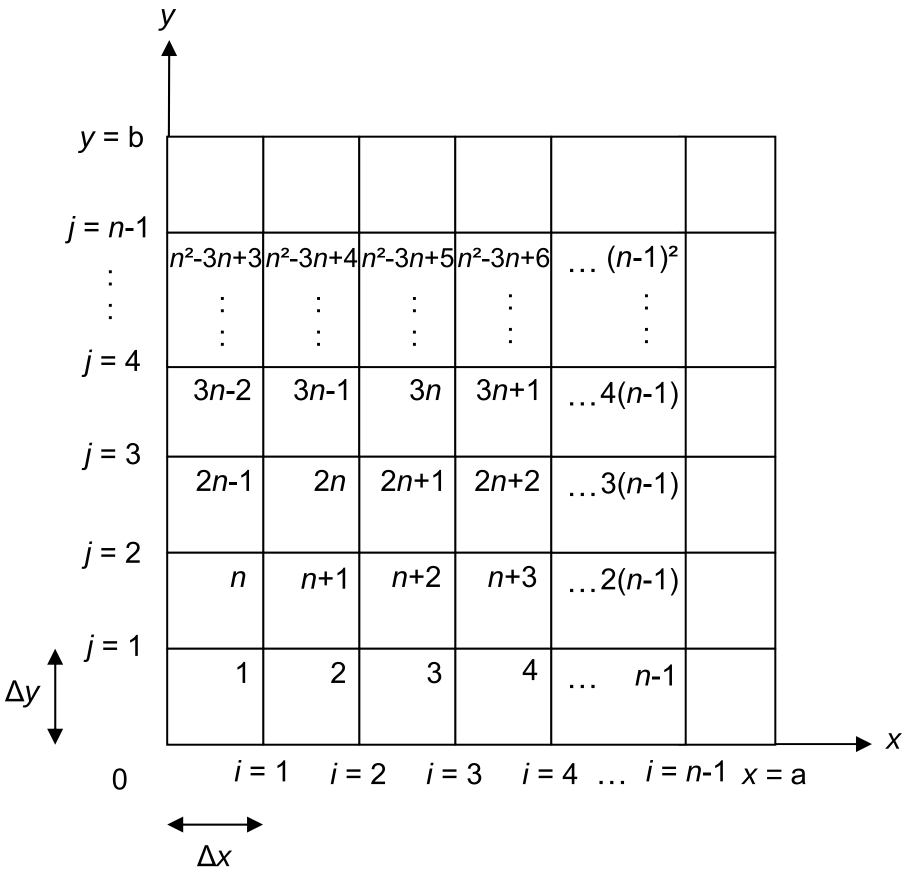
Selebih-lebihnya *n* nilai eigen bagi *A* akan dihasil daripada suatu persamaan cirian berdarjah *n* kerana kadang-kala nilai-nilai eigen berulangan terhasil. Spektrum bagi *A* merupakan suatu set yang mengandungi semua nilai eigen bagi *A*. Bukannya semua nilai eigen diperlukan, hanya nilai eigen yang terbesar sahaja akan diberi keutamaan. Nilai yang terbesar bagi nilai mutlak antara semua nilai eigen bagi *A* dinamakan sebagai jejari spektrum *A*. Jejari spektrum bagi *A* ditandakan dengan $\rho(A)$ dan ia boleh diungkap sebagai

$$\rho(A) = \underset{1 \le i \le n}{\text{maks}} |\lambda_i| . \qquad [2.2.12]$$

Nilai eigen bagi suatu matriks segitiga sama ada matriks segitiga atas ataupun matriks segitiga bawah, adalah pemasukan-pemasukan pada pepenjuru utama matriks tersebut iaitu a_{ii} bagi semua $1 \le i \le n$.

2.3 Kaedah beza terhingga

Kebanyakan penyelesaian PPS adalah terlalu rumit atau tidak wujud, jadi kaedah beza terhingga digunakan untuk menggantikan terbitan separa dalam PPS dengan mengubahkan PPS menjadi suatu sistem persamaan aljabar. Langkah pertama bagi kaedah beza terhingga adalah membahagikan domain penyelesaian kepada titik-titik diskret, contohnya bagi domain penyelesaian berbentuk segiempat sama dalam selang [a,b], domain dibahagikan kepada petak-petak segiempat kecil yang ditunjukkan dalam Rajah 2.3.1.



Rajah 2.3.1: Pembahagian domain kepada petak-petak segiempat kecil

Setiap titik yang terkandung dalam domain segiempat tersebut dipanggil sebagai titik grid. Domain segiempat tersebut menghasilkan sebanyak $(n-1)^2$ titik grid pedalaman. Nilai x dan nilai y bagi setiap titik masing-masing diwakili oleh $x_i = i\Delta x$ dan $y_j = j\Delta y$ dengan $1 \le i, j \le n$-1. Nilai u bagi sebarang titik (x_i, y_j) akan ditanda dengan $u_{i,j}$. Tatatanda berikut akan digunakan untuk kemudahan kita :

$u(x_i, y_j) = u(i\Delta x, j\Delta y) = u_{i,j}$

$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i+\Delta x, y_j) = u((i+1)\Delta x, j\Delta y) = u_{i+1,j}$

$u(x_i, y_{j-1}) = u(x_i, y_j-\Delta y) = u(i\Delta x, (j-1)\Delta y) = u_{i,j-1}$

$u(x_{i+1}, y_{j+1}) = u(x_i+\Delta x, y_j+\Delta y) = u((i+1)\Delta x, (j+1)\Delta y) = u_{i+1,j+1}$

Siri Taylor sering digunakan untuk menerbitkan rumus-rumus berangka. Kembangan siri Taylor bagi suatu fungsi f sekitar x_0 adalah

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\cdots$$

dengan fungsi f dan terbitan-terbitannya mesti selanjar pada selang [a,b]. Jika x_0 = 0, siri ini dinamakan sebagai siri Maclaurin. Siri Taylor juga boleh dituliskan dalam bentuk

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{\Delta x}{1!}f'(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\cdots$$

sekiranya $x-x_0=\Delta x$ diberikan.

Pengembangan siri Taylor boleh dilanjutkan kepada dua pembolehubah iaitu suatu fungsi $u(x_i,y_j+\Delta y)$ diperkembangkan pada titik (x_i,y_j) adalah berbentuk

$$u(x_i,y_j+\Delta y)=u(x_i,y_j)+\frac{\Delta y}{1!}\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}+\frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}+\frac{(\Delta y)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial y^3}$$
$$+\frac{(\Delta y)^4}{4!}\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial y^4}+\dots$$
$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+\frac{\Delta y}{1!}\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}+\frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}+\frac{(\Delta y)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial y^3}+\frac{(\Delta y)^4}{4!}\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial y^4}+\dots \qquad [2.3.1]$$

Dengan menyusun semula persamaan [2.3.1], $\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}$ boleh ditulis sebagai

$$\frac{\partial u(x_i,y_j)}{\partial y}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y}-\frac{\Delta y}{2!}\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2}-\frac{(\Delta y)^2}{3!}\frac{\partial^3 u(x_i,y_j)}{\partial y^3}+\frac{(\Delta y)^3}{4!}\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial y^4}+\dots \qquad [2.3.2]$$
$$=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta y}+O(\Delta y)$$

Tertib bagi ralat rumus beza terhingga [2.3.2] ditanda dengan Δy. Sebutan-sebutan dalam kuasa Δy yang menaik bagi rumus [2.3.2] adalah terkandung dalam $O(\Delta y)$ dan pangkasan ralatnya akan memberi

$$\frac{\partial u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}. \qquad [2.3.3]$$

Persamaan [2.3.3] dipanggil penghampiran beza ke depan bagi terbitan pertama $\frac{\partial u\left(x, y\right)}{\partial y}$ pada titik grid (*i*,*j*). Rumus [2.3.3] dikenali sebagai rumus beza ke depan.

Penggantian Δy dengan $-\Delta y$ dalam persamaan [2.3.1], suatu persamaan baru dapat dijanakan, iaitu

$$\begin{aligned} u\left(x_i, y_j - \Delta y\right) &= u\left(x_i, y_j\right) + \frac{\left(-\Delta y\right)}{1!}\frac{\partial u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y} + \frac{\left(-\Delta y\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^2} + \frac{\left(-\Delta y\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^3} \\ &\quad + \frac{\left(-\Delta y\right)^4}{4!}\frac{\partial^4 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^4} + \ldots \\ u_{i,j-1} &= u_{i,j} + \frac{\left(-\Delta y\right)}{1!}\frac{\partial u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y} + \frac{\left(-\Delta y\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^2} + \frac{\left(-\Delta y\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^3} \\ &\quad + \frac{\left(-\Delta y\right)^4}{4!}\frac{\partial^4 u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y^4} + \ldots \end{aligned}$$

[2.3.4]

Penyelesaian [2.3.4] untuk $\frac{\partial u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y}$ dengan memangkaskan sebutan-sebutan selepas dua sebutan yang pertama akan memberikan

$$\frac{\partial u\left(x_i, y_j\right)}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}. \qquad [2.3.5]$$

Persamaan [2.3.5] dikenali sebagai penghampiran beza ke belakang dan ralatnya mempunyai tertib yang sama dengan penghampiran beza ke depan. Rumus [2.3.5] dikenali sebagai rumus beza ke belakang.

Jika menolak persamaan [2.3.4] daripada persamaan [2.3.1], kita memperoleh suatu persamaan

$$u\left(x_i,y_j+\Delta y\right)-u\left(x_i,y_j-\Delta y\right)=2\Delta y\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}+\frac{2\left(\Delta y\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y^3}+\ldots$$
$$u_{i,j+1}-u_{i,j-1}=2\Delta y\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}+\frac{2\left(\Delta y\right)^3}{3!}\frac{\partial^3 u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y^3}+\ldots \qquad [2.3.6]$$

Dengan menyusun semula persamaan [2.3.6], $\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}$ boleh diungkap sebagai

$$\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y}-\frac{\left(\Delta y\right)^2}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y^3}+\ldots=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y}+O\left(\Delta y^2\right). \qquad [2.3.7]$$

Pangkasan ralat bagi persamaan [2.3.7] akan memberi

$$\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial y}\approx\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y}. \qquad [2.3.8]$$

Persamaan [2.3.8] digelar sebagai penghampiran beza memusat dan ralatnya bertertib dua iaitu $O\left(\Delta y^2\right)$. Persamaan [2.3.8] dikatakan mempunyai penghampiran yang lebih baik berbanding dengan persamaan [2.3.3] dan [2.3.5] kerana ralatnya bertertib lebih tinggi. Rumus [2.3.8] dikenali sebagai rumus beza memusat.

Dengan menggunakan cara yang serupa, rumus-rumus beza ke depan, ke belakang dan memusat bagi $\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}$ boleh dijanakan.

$$\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}\approx\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right) \text{ (rumus beza ke depan)} \qquad [2.3.9]$$

$$\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}\approx\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right) \text{ (rumus beza ke belakang)} [2.3.10]$$

$$\frac{\partial u\left(x_i,y_j\right)}{\partial x}\approx\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x}+O\left(\Delta x^2\right) \text{ (rumus beza memusat)} [2.3.11]$$