UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

EUM 202 - Matematik Kejuruteraan IVE
EUM 204 - Matematik Kejuruteraan IV

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan, di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan adalah seperti di dalam kurungan (...).

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

...2/-

1. (a) Biar A jadi satu matriks yang diberi oleh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Selesaikan sistem persamaan homogen

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(25%)

(ii) Jikalau sistem persamaan tak homogen yang diberi oleh

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

adalah konsisten (consistent), tentukan nilai a, b dan c. Bagi nilai a, b dan c yang ditentukan oleh anda, selesaikan sistem tak homogen ini.

(25%)

(b) Biar I jadi matriks identiti 4 x 4 dan B jadi matriks yang diberi oleh

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Lakukan operasi baris terhadap tablo (tableau)

B	I

Untuk menentukan B^{-1} (jika wujud).

(30%)

(ii) Daripada operasi baris yang anda lakukan dalam bahagian (b) (i) di atas, cari nilai penentu B, dan seterusnya nilai penentu B^{-1}.

(20%)

2. Pertimbangkan matriks simetri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Satu daripada nilai eigen bagi matriks A ialah 3. Tentukan nilai a.

(20%)

(b) Bagi nilai a yang anda tentukan dalam bahagian (a) di atas, cari semua nilai eigen dan vektor eigen bagi A.

(30%)

(c) Guna jawapan anda dalam bahagian (b) di atas untuk membina satu metriks P (saiz 3 x 3) yang mempunyai sifat

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

di mana λ_i (i = 1, 2, 3) ialah nilai eigen bagi A. Cari P^{-1} dan kira matriks A^{16}. (3^{16} = 6561.)

(30%)

(d) Cari penyelesaian umum bagi sistem persamaan pembezaan biasa

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t),$$

dengan menggunakan nilai a yang terdapat dalam bahagian (a) di atas.

(20%)

3. Jelmaan Laplace bagi fungsi f(t) ($t \geq 0$) adalah diberi oleh

$$L\{ f(t) ; s \} = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-s\,t)\, dt$$

(a) Jikalau fungsi $f_N(t)$ ($N \geq 0$ ialah integer) ditakrif oleh

$$f_N(t) = \begin{cases} t^N & \text{jika } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{jika } t > 1, \end{cases}$$

tunjukkan bahawa

$$L\{f_N(t)\,;\,s\} = \frac{N!}{s^{N+1}} + \frac{1}{s}\exp(-s) - \exp(-s)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{N!}{(N-p)!}\,s^{-p-1}\,.$$

(30%)

(b) Jikalau $L\{\,g_k(t)\,;\,s\} = s^{-k}(s^2+1)^{-1}$ di mana k ialah integer yang bukan negatif, tentukan fungsi $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$, $g_5(t)$ dan $g_6(t)$.

Kemudian, gunakan jawapan anda untuk menulis satu ungkapan umum bagi $g_{2n}(t)$ dan $g_{2n+1}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots)$.

(Petunjuk: $L\{\sin(t)\,;\,s\} = (s^2+1)^{-1}$ dan

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\,;\,s\right\} = s^{-1}\,L\{\,f(t)\,;\,s\}\,.)$$

(30%)

(c) Selesaikan

$$y''(t) + y(t) = f_2(t)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,,$$

di mana $f_2(t)$ ialah seperti yang ditakrifkan dalam bahagian (a) di atas.

(Petunjuk: Anda boleh guna bahagian (a) dan (b) di atas dan keputusan

$$L\{f''(t)\,;\,s\} = s^2\,L\{f(t)\,;\,s\} - sf(0) - f'(0)$$

$$L\{\,u_a(t)\,f(t-a);\,s\} = \exp(-as)\;L\{f(t)\,;\,s\}\,,$$

di mana

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t > a \\ 0 & \text{jika } 0 \le t < a\,). \end{cases}$$

(40%)

4. (a) Jelmaan Fourier cosine bagi f(x) (x $\geq$ 0) ditakrifkan oleh

$$F_c\{f(x)\,;\,\omega\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx\,.$$

Tunjukkan bahawa

$$F_c\{\,a\,(a^2+x^2)^{-1}\,;\,\omega\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-a\omega),$$

di mana a ialah nombor kompleks yang mempunyai bahagian nyata yang positif.

(Petunjuk: Anda boleh guna

$$F_C\{f(x)\,;\,\omega\} = G(\omega) \Leftrightarrow F_C\{G(\omega)\,;\,x\} = f(x)\,,$$

$$L\{\cos(bt)\,;\,s\} = s\,(s^2+b^2)^{-1}\,,\ \mathrm{Re}\{s\} > 0\,,$$

di mana s ialah parameter kompleks dan L { f(t) ; s } ialah jelmaan Laplace yang ditakrifkan dalam soalan 3)

(30%)

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan separa (PPS)

$$\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0\,,\quad \phi = \phi(x\,,y),$$

di mana α dan β ialah pemalar positif.

(i) Jikalau PPS di atas mempunyai penyelesaian dalam bentuk $\phi = f(Z)$, di mana $Z = x + py$ dan f(Z) boleh dibezakan terhadap Z sebanyak dua kali, tentukan nilai pemalar P. Kemudian, tunjukkan bahawa jikalau $\beta^2 - 4\alpha < 0$ maka P bukan nyata.

(30%)

(ii) Bagi $\beta^2 - 4\alpha < 0$ dan rantau $y \geq 0$, selesaikan PPS di atas jikalau diberi syarat

$\phi(x, 0) = (1 + x^2)^{-1}$ bagi semua x,

$\phi(x, y) \longrightarrow 0$ apabila $x^2 + y^2 \longrightarrow \infty$.

(Petunjuk: Pilih p supaya bahagian khayalannya positif. Kemudian, biar

$$f(Z) = \int_0^\infty [A(u) \exp(i u Z) + B(u) \exp(-i u Z)] du ,$$

di mana $i = \sqrt{-1}$. Tentukan A(u) dan B(u) dengan menggunakan syarat yang diberi. Bahagian (a) di atas adalah berguna. Bahagian itu juga boleh digunakan untuk menilaikan ungkapan kamiran bagi f(Z) selepas A(u) dan B(u) ditentukan. Jawapan ialah $\phi = \mathrm{Re}\{f(Z)\}$.)

(40%)

- oooOooo -