UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1990/91

Oktober/November 1990

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 6 muka surat beserta LAMPIRAN (2 muka surat) bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan, di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan adalah seperti di dalam kurungan (...).

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

1. Nilaikan setiap kamiran berikut:-

(a) $\oint_C [(x^6y^2 + 1)\,dx + (y^5 + x^2y^2)\,dy]$

diberi C : sempadan rantau segiempat $1 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$, mengikut arah pusingan jam.

(b) $\int_{-1}^{0}\int_{y^{1/3}}^{0} x^6 \exp(x^2y)\,dx\ dy$

(c) $\iiint_V xyz\ dV$,

diberi $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x \ge 0, y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

(d) $\iint_A dA$,

diberi $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 1\}$.

(100%)

2. (a) (i) Jikalau $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 adalah pemalar, tunjukkan bahawa

$$\oint_C [(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3)\,dx + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3)\,dy] = (\beta_1 - \alpha_2)\,A\,,$$

yang mana A ialah luas rantau yang terkandung oleh lengkung C yang tertutup.

(10%)

(ii) Cari luas rantau yang terkandung oleh hiposikloid $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
(Petunjuk : Persamaan parametrik ialah $x = \cos^3 t$ dan $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$).

(20%)

(b) (i) Jikalau $f = f(x, y, z)$ ialah suatu fungsi skalar yang selanjar dalam rantau V, tunjukkan bahawa

$$\underset{\sim}{\nabla} \times (\underset{\sim}{\nabla} f) = \underset{\sim}{0} \text{ bagi } (x, y, z) \in V$$

(10%)

(ii) Biar $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(x, y, z)$ menjadi suatu fungsi vektor yang boleh ditulis dalam bentuk $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla}\phi$, yang mana $\phi = \phi\ (x, y, z)$ ialah suatu fungsi skalar yang selanjar dalam rantau V. Jikalau C ialah sebarang lintasan dari titik (a_1, a_2, a_3) ke (b_1, b_2, b_3) dan C ada dalam rantau V, tunjukkan bahawa

$$\int_C \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \phi(b_1, b_2, b_3) - \phi(a_1, a_2, a_3),$$

yang mana $d\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{i}\, dx + \underset{\sim}{j}\, dy + \underset{\sim}{k}\, dz$.
(Petunjuk : Perhatikan bahawa $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$.)

(20%)

(iii) Cari satu fungsi $\phi = \phi(x, y, z)$ yang mana $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\nabla}\phi$, diberi
$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{i}\,(2xy + 3) + (x^2 - 4z)\underset{\sim}{j} - 4y\,\underset{\sim}{k}$
Kemudian, guna bahagian b(ii) untuk menilaikan

$$\int_C \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S}.$$

bagi sebarang lintasan C dari titik (3, -1, 2) ke (2, 1, -1).

(20%)

(c) (i) Biar $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{G}(x, y, z)$ menjadi suatu fungsi vektor yang selanjar dalam rantau V. Tunjukkan bahawa

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{G}) = 0 \text{ bagi } (x, y, z) \in V.$$

(10%)

(ii) Buktikan bahawa

$$\oiint_A (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{G}) \cdot \underset{\sim}{\hat{n}}\, dS = 0,$$

yang mana A ialah suatu permukaan tertutup dalam rantau V
$\underset{\sim}{\hat{n}}$ ialah suatu vektor yang serenjang kepada permukaan A.

(10%)

3. (a) Biar z_1 dan z_2 menjadi dua nombor kompleks. Buktikan bahawa

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right).$$

(20%)

Kemudian, tunjukkan bahawa setiap keputusan berikut adalah benar:-

(i) Jikalau $|z_1| = 1$ atau $|z_2| = 1$ maka $\left|\dfrac{(z_1 - z_2)}{(\bar{z}_1 z_2 - 1)}\right| = 1$.

(ii) Jikalau $|z_1| < 1$ dan $|z_2| < 1$ maka $\left|\dfrac{(z_1 - z_2)}{(\bar{z}_1 z_2 - 1)}\right| < 1$.

(20%)

(b) Diberi $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$), lorekkan rantau yang mengandungi semua titik (x, y) yang dihuraikan oleh setiap ketaksamaan berikut:-

(i) $\left|\dfrac{1+z}{2-z}\right| \le 1$,

(ii) $|z + 2 - i| > 4$.

(20%)

(c) Cari semua penyelesaian bagi

(i) $(z^3 + 8)(z^2 + i) = 0$,

(ii) $\exp(z) = \sqrt{2} + i$.

(20%)

(d) Fungsi Plemelj

$$X(z) = (z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2},\ z = x + iy,$$

boleh ditulis semula dalam bentuk

$$X(z) = R_1^{1/2} R_2^{1/2} \exp(i\theta_1) \exp(i\theta_2),$$

yang mana $R_1 = |z - 1|$, $R_2 = |z + 1|$, $\theta_1 = \arg(z - 1)$ dan $\theta_2 = \arg(z + 1)$.

Jikalau kita menghadkan nilai θ_1 dan θ_2 di antara 0 dan 2π, nilaikan

(i) $X(i)$ dan $X(-i)$,

(ii) $\lim\limits_{y \to 0^+} [X(iy) - X(-iy)]$.

(20%)

4. (a) Nilaikan

$$\int_C \frac{z^2\, dz}{(2 - z)(z-3)(z^2 + 1)}, \; z = x + iy,$$

yang mana C ialah bulatan $|z| = a$ (a ialah nombor nyata yang positif), mengikut arah pusingan lawan jam, bagi setiap kes berikut:-

(i) $a < 1$, (ii) $1 < a < 2$,
(iii) $2 < a < 3$, (iv) $a > 3$.

(40%)

(b) Nilaikan

$$\int_C \frac{\cos(z)\, dz}{z^2 (z - 1)}, \; z = x + iy,$$

yang mana C ialah bulatan $|z| = 1/2$, mengikut arah pusingan lawan jam.

(20%)

(c) Nilaikan setiap Kamiran berikut:-

(i) $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4\cos(t)}$$

(Petunjuk : Biar $z = \exp(it)$. Oleh itu, $2\cos(t) = z + z^{-1}$.)

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$$

(40%)

- oooOooo -

LAMPIRAN MAKLUMAT

1. Di bawah syarat-syarat tertentu

   (a) teorem Green:

$$\oint_C [F_1\, dx + F_1\, dy] = \iint_\Omega \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] d\Omega$$

   (b) teorem Gauss-Ostrogradskii :

$$\iiint_V \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F}\, dV = \iint_A \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} \nabla\, dA$$

   (c) teorem Stokes :

$$\oint_C \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{S} = \iint_A (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F}) \cdot \underset{\sim}{\hat{n}}\, dA .$$

2. (a) Koordinat kutub (r, θ) :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

   (b) Koordinat silinder (r, θ, z) :

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz .$$

   (c) Koordinat sfera (ρ, θ, ϕ) :

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi .$$
$$dx\,dy\,dz = \rho^2\,|\sin\phi|\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

2. Rumus Kamiran Cauchy :

Di bawah syarat-syarat tertentu,

$$2\pi i \int_C \frac{F(z)dz}{z - z_0} = F(z_0),$$

dan

$$2\pi i \int_C \frac{F(z)dz}{(z - z_0)^2} = F'(z_0),$$

- oooOooo -