UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 6 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan, di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan adalah seperti di dalam kurungan (...).

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

...2/-

1. (a) Biar $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ (x, y, z) dan $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}$ (x, y, z) jadi dua fungsi vektor. Andai bahawa semua terbitan separa (hingga peringkat 2) bagi $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ wujud.
Tunjukkan bahawa :

(i) $\underset{\sim}{\nabla} \cdot (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{B} \cdot (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{A}) - \underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{B})$

(ii) $\underset{\sim}{\nabla} \times (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{\nabla} (\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A}) - \nabla^2 \underset{\sim}{A}$

(40%)

(b) Mengikut teori elektromagnet, di bawah syarat-syarat tertentu, vektor medan elektrik $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}$ (x, y, z, t) dan vektor medan magnet $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}$ (x, y, z, t) memenuhi persamaan Maxwell

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{E} = 0, \quad \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{H} = 0, \quad \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{E} = \frac{-1}{C} \frac{\partial \underset{\sim}{H}}{\partial t}, \quad \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{H} = \frac{1}{C} \frac{\partial \underset{\sim}{E}}{\partial t},$$

di mana C ialah halaju cahaya (pemalar).

Buktikan :

(i) $\nabla^2 \underset{\sim}{E} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \underset{\sim}{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \underset{\sim}{H} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \underset{\sim}{H}}{\partial t^2}$,

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (|\underset{\sim}{E}|^2 + |\underset{\sim}{H}|^2) \right\} = -C \underset{\sim}{\nabla} . (\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{H})$.

(Petunjuk untuk bahagian (b) (i) - (ii) :
Bahagian (a) di atas mungkin ada gunanya?

(40%)

(c) Jikalau vektor medan elektrik $\underset{\sim}{E}$ dalam bahagian (b) di atas bergantung pada koordinat x dan t sahaja dan boleh ditulis dalam bentuk $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E}$ (x + pt), tentukan pemalar p.

(20%)

...3/-

2. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $$\int_C \left[xy^2 + 3x^2 y^4 + 2\right] dx + (x + y^2)\, dy \,]$$

di mana C ialah lintasan daripada titik (1, 1) hingga titik (4, 2) melalui lengkung $y = \sqrt{x}$.

(ii) $$\iint_R (x^2 + y^2 + 4xy)\, dx\, dy$$

di mana $R = \{(x, y) = 0 \leq x \leq 1,\ y \leq x,\ y \geq x^2\}$.

(40%)

(b) Mengikut teorem Green, di bawah syarat tertentu,

$$\oint_C (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\, dy .$$

(i) Guna teorem Green untuk menunjukkan bahawa, di bawah syarat tertentu,

$$\iint_R \nabla^2 \omega\, dx\, dy = \oint_C (\underset{\sim}{\nabla}\, \omega) \cdot \underset{\sim}{n}\, ds ,$$

di mana $\omega = \omega\ (x, y)$ ialah fungsi yang sesuai dan $\underset{\sim}{n}$ ialah vektor normal pada C yang panjangnya satu unit dan yang menuju keluar daripada R.

(Petunjuk: Biar $P = -\partial\omega/\partial y$ dan $Q = \partial\omega/\partial x$.)

(30%)

(ii) Katalah persamaan Poisson

$$\nabla^2 f = F \text{ dan } \nabla^2 g = G$$

($f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$, $F = F(x, y)$ dan $G = G(x, y)$
ialah fungsi yang sesuai)
adalah dipenuhi dalam satu rantau R terhingga yang terletak pada satah Oxy.
Guna keputusan dalam bahagian (b) (i) di atas untuk menunjukkan bahawa

$$\oint_C \left[f \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{\nabla} g - g \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{\nabla} f\right] ds = \iint_R [fG - gF]\, dx\, dy.$$

(Petunjuk: Biar

$$\underset{\sim}{\nabla}\omega = \left[f\frac{\partial g}{\partial x} - g\frac{\partial f}{\partial x},\ f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}\right].)$$

(30%)

3. (a) Biar z_j ($j = 1, 2, 3$) jadi tiga nombor kompleks berasingan. Bahagian nyata bagi z_j ialah x_j dan bahagian khayalan bagi z_j ialah y_j.
Tunjukkan bahawa

$$\text{Im}\left\{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right\} = 0$$

(Im mewakili bahagian khayalan sesuatu nombor kompleks)
jikalau, dan hanya jikalau, titik (x_1, y_1), (x_2, y_2) dan (x_3, y_3) adalah terletak pada satu garis lurus yang sama.

(30%)

(b) Cari semua penyelesaian dalam bentuk a + ib (a dan b ialah nombor nyata) bagi

(i) $z^4 - z^3 - 8z + 8 = 0$

(ii) $z^{1/4} = 1$

(iii) $\exp(z) = 1 - i$

(30%)

(c) Biar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jadi satu fungsi analisis dalam rantau kompleks D ($z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$). Nyatakan hubungan Cauchy - Riemann di antara u dan v.

(10%)

(i) Pastikan samada $f(z) = \bar{z}^2$ ialah fungsi analisis atau tidak.

(10%)

(ii) Tunjukkan bahawa u dan v menyelesai persamaan Laplace dalam rantau D.

(20%)

4. Rumus Kamiran Cauchy adalah diberi oleh

$$2\pi i\ F(z_0) = \oint_C \frac{F(z)\,dz}{z - z_0}, \quad z = x + iy$$

(a) Biar C_1 jadi bulatan $|z| = 1$,

C_2 jadi bulatan $|z| = 2$,

C_3 jadi bulatan $|z| = 9$ dan

C_4 jadi bulatan $|z| = 10$

Bulatan C_1 dan C_2 diberi arah pusingan jam, manakala C_3 dan C_4 diberi arah pusingan lawan jam.

...6/-

Jikalau $G(z) = \dfrac{\cos(z)}{z(z^3 + 3\pi z^2 - \pi^2 z - 3\pi^3)}$,

nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\oint_{C_1} G(z)\, dz$, (ii) $\oint_{C_1 - C_2} G(z)\, dz$

(iii) $\oint_{C_3} G(z)\, dz$, (iv) $\oint_{C_4 - C_3} G(z)dz$.

(40%)

(b) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$,

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}$,

(Petunjuk: Biar $z = \exp(it)$. Oleh itu, $\cos(t) = z + z^{-1}$.)

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-1/2}\, dx}{1 + x}$.

(Petunjuk: $x^a = \exp(a \ln(x))$.)

(60%)

- oooOooo -