UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1990/91

Jun 1991

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 9 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

Mesinkira boleh digunakan.

...2/-

1. (a) Jikalau kita menggunakan koordinat Cartesan, dalam medan aliran bendalir, hukum keabadian jisim memberi kita persamaan kamiran.

$$\int_S\int \rho\, \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, dS = -\int\int_V\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV .$$

V ialah <u>sebarang</u> ruang dimensi - 3 terhingga dalam medan aliran ; S ialah permukaan sempadan untuk V ; $\underset{\sim}{n}$ ialah vektor normal (pada permukaan S) yang panjangnya ialah satu unit dan yang menuju ke arah keluar dari V ; $\rho = \rho\,(x, y, z, t)$ ialah ketumpatan bendalir ; $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{q}\,(x, y, z, t)$ ialah halaju sesuatu zarah bendalir pada titik (x, y, z) dan masa t.

(i) Gunakan teorem pencapahan untuk menunjukkan bahawa $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{q}\,(x, y, z, t)$ mesti memenuhi persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underset{\sim}{\nabla} \cdot (\rho\, \underset{\sim}{q}) = 0 .$$

(20%)

(<u>Petunjuk:</u> Teorem pencapahan menyatakan bahawa, di bawah syarat tertentu,

$$\int_S\int \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, dS = \int\int_V\int \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F}\, dV)$$

...3/-

(ii) Bagi bendalir yang tidak boleh dimampat, ketumpatan ρ ialah pemalar (tidak bersandar pada titik (x, y, z) dan masa t). Putaran sesuatu zarah bendalir pada titik (x, y, z) dan masa t adalah diberi oleh $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{q}$. Jikalau semua zarah dalam satu aliran bendalir mantap (aliran tidak berubah dengan masa t) dan bendalir tidak boleh dimampat, tunjukkan bahawa kita boleh ambil $\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{\nabla}\phi$ dan fungsi keupayaan $\phi = \phi(x, y, z)$ mesti memenuhi persamaan Laplace $\nabla^2\phi = 0$.

(20%)

(b) Biar $f(z) = u(x,y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy$ dan $i = \sqrt{-1})$ jadi satu fungsi kompleks yang beranalisis dalam satu rantau kompleks Ω.

(i) Buktikan hubungan Cauchy - Riemman ,

$$\text{iaitu } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{bagi } z \in \Omega$$

(20%)

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

bagi $z \in \Omega$

(10%)

(iii) Tunjukkan bahawa

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{M} \left(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\right)$$

(a_n dan b_n ialah pemalar ; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\tan\theta = y/x$)

ialah satu penyelesaian untuk persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \ .$$

(<u>Petunjuk</u> : Pertimbangkan fungsi beranalisis $f(z) = z^n$ ($n \geq 0$ ialah integer) dan gunakan bahagian b (ii) serta koordinat polar.)

(20%)

(iv) Terangkan mengapa fungsi kompleks memainkan peranan yang penting dalam kajian aliran bendalir. (Dalam aliran bendalir jenis apa fungsi kompleks adalah penting? kenapa?)

(10%)

2. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\int_C \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{r}$, diberi $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{i}\,(3x - y) + \underset{\sim}{j}\,(2y - z) + \underset{\sim}{k}\,x^2$,

$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{i}x + \underset{\sim}{j}y + \underset{\sim}{k}z$ dan C ialah satu lintasan dari titik (1, 1, 1) hingga (0, 0, 0) yang ditakrif oleh $C = \{ (x, y, z) : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1 \}$.

(ii) $$\int_{x=1}^{2} \int_{y=\sqrt{x}}^{x} \phi(x, y)\, dy\, dx + \int_{x=2}^{4} \int_{y=\sqrt{x}}^{2} \phi(x, y)\, dy\, dx,$$

diberi $\phi(x, y) = \sin[\pi x/(2y)]$.

(iii) $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{4} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{4} xyz\; dz\, dy\, dx.$$

(iv) $$\iint_S \exp(-x^2 - y^2)\, dS,$$ diberi

$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9;\ x, y \text{ nyata}\}$.

(Petunjuk : Gunakan koordinat polar r dan θ, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\tan\theta = y/x$. Keputusan $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$ juga boleh digunakan .)

(60%)

(b) Di bawah syarat tertentu,

$$\oint_C [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy] = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

$$\iiint_V \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F}\, dV = \iint_A \underset{\sim}{F}(x, y, z) \cdot \underset{\sim}{n}\, dA.$$

...6/-

Keputusan yang diberi di atas boleh digunakan untuk menjawab soalan berikut:

(i) A ialah satu rantau terhingga dalam satah Oxy ; C ialah sempadan (garis) untuk A. Jikalau fungsi $\phi = \phi\ (x, y)$ menyelesaikan persamaan Laplace $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0$ dalam A, tunjukkan bahawa

$$\oint_C \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \phi \, dS = 0 ,$$

$\underset{\sim}{n}$ ialah vektor normal pada C yang menuju ke arah keluar dari A.

(20%)

(ii) V ialah satu rantau terhingga dalam ruang dimensi - 3 ; A ialah sempadan permukaan untuk V. Jikalau fungsi $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}\ (x, y, z)$ diberi oleh $\underset{\sim}{F} = \nabla \times \underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{G}\ (x, y, z)$ ialah fungsi vektor tertentu, nilaikan $\int\int_A \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\ dA$, $\underset{\sim}{n}$ ialah vektor normal pada A yang menuju ke arah keluar dari V.

(20%)

3. (a) Jikalau $z = x + iy$ (x dan y ialah koordinat Cartesan ; $i = \sqrt{-1}$), huraikan bentuk yang diberi oleh persamaan

$$az\bar{z} + pz + \bar{p}\bar{z} + d = 0 ;$$

p ialah nombor kompleks ; a dan d ialah nombor nyata ; p, a dan d mesti memenuhi ketaksamaan $|p|^2 > ad$.

(30%)

(b) Dapatkan semua penyelesaian dalam bentuk a + ib (a dan b ialah nombor nyata ; $i = \sqrt{-1}$) untuk setiap persamaan berikut:

(i) $z^5 - 8i\ z^4 + z = 8i$

(20%)

(ii) $\exp(z) = 1 + i$.

(10%)

(c) Fungsi Plemelj yang memainkan peranan yang penting dalam penyelesaian berbagai masalah fizik, seperti mekanik retak, adalah ditakrif oleh

$$P(z) = (z^2 - 1)^{1/2}, \quad z = x + iy \ .$$

Fungsi ini boleh ditulis semula sebagai

$$P(z) = R_1^{1/2}\ R_2^{1/2} \exp\left[i\,(\theta_1 + \theta_2)/2\right];$$

$$R_1 = |z-1|, \ R_2 = |z+1|, \ \theta_1 = \arg(z-1) \text{ dan } \theta_2 = \arg(z+1) \ ;$$

θ_1 dan θ_2 dipilih supaya $0 \le \theta_1 < 2\pi$ dan $0 \le \theta_2 < 2\pi$.

...8/-

Diberi

$$\phi(x, y) = \text{Re}\,\{(z + P(z))\,i\}$$

(Re mewakili bahagian nyata sesuatu nombor kompleks),

nilaikan :

(i) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ untuk $|x| < 1$, $y = 0$.

(15%)

(ii) $\lim\limits_{y \to 0^+} \left\{ \phi(x, y) - \phi(x, -y) \right\}$ untuk $|x| < 1$.

(15%)

4. Rumus Kamiran Cauchy adalah diberi oleh

$$2\pi i\, F(z_o) = \oint_C \frac{F(z)\, dz}{(z - z_o)}.$$

(a) Nyatakan syarat yang diperlu untuk rumus kamiran Cauchy (yang diberi di atas) jadi benar.

(10%)

(b) Dengan membezakan rumus di atas terhadap z_o, dapatkan satu ungkapan atau rumus untuk kamiran.

$$\oint_C \frac{F(z)\, dz}{(z - z_o)^{n+1}};$$

n ialah satu integer yang bukan negatif.

(10%)

...9/-

(c) Biar C_1 jadi bulatan $|z| = 1$ dan C_2 bulatan $|z| = 4$; C_1 dan C_2 diberi arah pusingan lawan jam.

Nilaikan :

(i) $$\int_{C_1+C_2} \frac{\cos(z)\, dz}{z(z-\pi)}$$

(ii) $$\int_{C_2-C_1} \frac{\cos(z)\, dz}{z(z-\pi)}$$

(iii) $$\int_{C_1} \frac{(z^6 + 3z^5 - z^3 - 2)\, dz}{z^7}$$

(30%)

(d) Nilaikan setiap Kamiran berikut:

(i) $$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^4 + 1},$$

(20%)

(ii) $$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\, dx}{x^3 + 1}.$$

(30%)

- oooOooo -