UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1990/91

Oktober/November 1990

EUM 102 - Matematik Kejuruteraan II

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 muka surat beserta LAMPIRAN (3 muka surat) bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana LIMA (5) soalan, di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan adalah seperti di dalam kurungan (...).

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

Buku Sifir Matematik dan Buku Sifir Statistik ada disediakan.

1. (a) Tunjukkan bahawa persamaan kebezaan,

$$(3x^4y^2 - x^2)dy - (2xy - 4x^3y^3)dx = 0$$

ialah persamaan tepat.

Seterusnya, carilah penyelesaian khusus bagi persamaan kebezaan itu jika diberi $y = 2$ bila $x = 1$.

(30%)

(b) Selesaikan persamaan Euler-Cauchy berikut:

$$2x^2y'' + 14xy' + 26y = 0.$$

(30%)

(c) Sebuah tangki pada permulaannya mengandungi 50 liter air suling. Pada masa $t = 0$, sejenis larutan yang mengandungi 2 kg garam terlarut per liter mengalir masuk ke dalam sebuah tangki pada kadar 3 liter per minit. Campuran itu dipastikan seragam dengan mengaduk dan campuran yang teraduk dengan baik itu mengalir serentak keluar dari tangki itu pada kadar yang sama. Katakan x ialah jumlah banyaknya garam di dalam tangki itu pada masa $t > 0$.

(i) Dapatkan model matematik dalam bentuk persamaan kebezaan bagi x sebagai fungsi t?,

(ii) Tentukan berapakah banyaknya garam berada di dalam tangki itu pada masa t minit? dan

(iii) Tentukan berapakah banyaknya garam berada di dalam tangki selepas 25 minit?.

(40%)

2. (a) Persamaan Airy yang digunakan untuk memodelkan pembelauan cahaya ialah,

$$y'' - xy = 0.$$

...3/-

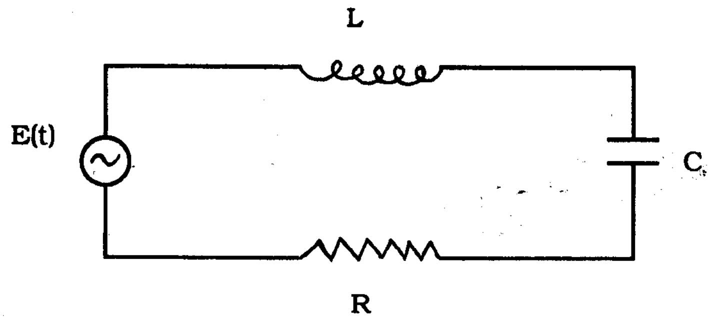
Dengan menganggapkan bahawa bentuk penyelesaiannya ialah

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dan dengan menggunakan kaedah siri kuasa, dapatkan penyelesaian am bagi persamaan Airy di atas.

(60%)

(c) Model matematik bagi litar elektrik yang ditunjukkan di bawah ini.



diberi oleh persamaan kebezaan,

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t);$$

di mana L ialah induktans, R ialah rintangan, C ialah kapasitans, E(t) ialah elektromotif yang berubah dan q(t) ialah cas pada masa t.

Katakan L, R dan C suatu litar diberi sebagai 1 henri, 300 ohm dan 5×10^{-5} farad masing-masing, dan E(t) = 40 volts. Carilah cas, q(t) pada sebarang masa t dengan syarat-syarat awalan q(0) = 0 dan q'(0) = 0.

(40%)

3. (a) Dengan menggunakan Jelmaan Laplace, selesaikan masalah nilai awalan bagi persamaan kebezaan,

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

(30%)

...4/-

(b) Persamaan Bessel jenis pertama peringkat n ialah persamaan dalam bentuk,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

(i) Dengan menggunakan penggantian $y = ux^{-1/2}$, tunjukkan bahawa persamaan di atas boleh ditulis dalam bentuk,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 + \frac{1 - 4n^2}{4x^2}\right)u = 0.$$

(ii) Dari (i), tunjukkan bahawa apabila $x \to \infty$, maka penyelesaian bagi persamaan itu ialah,

$$y(x) \to x^{-1/2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

di mana C_1 dan C_2 ialah malar-malar sebarangan.

(iii) Jika diberi $J_n(x)$ ialah fungsi penyelesaian bagi persamaan Bessel di atas dan

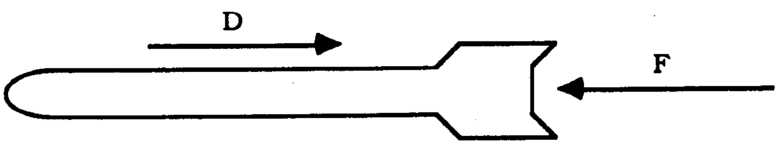
$$I_n(x) = j^{-n}J_n(jx), \; j = \sqrt{-1},$$

tunjukkan bahawa $I_n(x)$ ialah suatu penyelesaian bagi persamaan kebezaan,

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0.$$

(40%)

(c) Sebuah roket bergerak melalui laluan lurus mengufuk seperti dalam gambarajah di bawah.



...5/-

Jika jisim roket, m berubah mengikut masa, t semasa bergerak dan halaju, v juga berubah disebabkan oleh daya tujah, F maka m dan v adalah dalam fungsi t dan model matematiknya diberi oleh persamaan kebezaan,

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = F - D$$

yang mana D ialah daya seretan roket itu.

Katakan roket itu diberi daya tujah 10,000 kg dalam 10 saat pergerakan. Pada masa itu, jisim roket berubah mengikut masa, m = 50 - t slugs, dan daya seretannya ialah 3v kg, yang mana v ialah halaju roket itu pada sebarang masa t. Carilah persamaan halaju roket itu. Seterusnya, tentukan halaju roket itu pada masa t = 10 saat. Anggapkan bahawa halaju awal roket ialah sifar pada masa t = 0.

(30%)

4. (a) Pembolehubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian (f.k.k),

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & , \ 1 \le x \le 2 \\ kx & , \ 2 < x < 3 \\ 0 & , \ x \ge 3 . \end{cases}$$

(i) Apakah nilai k supaya f(x) benar-benar f.k.k?

(ii) Cari $P(X > 2)$ dan $P(0.5 < X < 2.5)$.

(30%)

(b) Katakan sebuah sistem mengandungi dua komponen A dan B. Kebarangkalian komponen A tidak berfungsi ialah 0.01, kebarangkalian B tidak berfungsi ialah 0.02 dan kebarangkalian kedua-dua komponen itu tidak berfungsi ialah 0.001.

(i) Adakah peristiwa komponen-komponen A dan B gagal berfungsi itu sebagai peristiwa bebas?

(ii) Apakah kebarangkalian komponen A tidak berfungsi, jika diketahui bahawa komponen B tidak berfungsi?

...6/-

(iii) Apakah kebarangkalian sekurang-kurangnya satu daripada komponen itu tidak berfungsi?

(30%)

(c) Dalam satu kajian, didapati min dan sisihan piawai kadar pembakaran bahan dorong sebuah roket ialah 40 cm/s dan 2 cm/s, masing-masing. Berdasarkan sampel rawak bersaiz $n = 25$, didapati minnya ialah $\bar{x} = 41.25$ cm/s. Dengan beranggapan bahawa kadar pembakaran itu tertabur secara normal, ujilah hipotesis nul, $\mu_o = 40$ melawan hipotesis alternatif, $\mu_1 \neq 40$ pada paras keertian $\alpha = 0.05$ dan terangkan keputusan anda.

(40%)

5. (a) Katakan suhu bagi suatu cecair tidak pernah kurang daripada 50°C atau lebih daripada 51°C. Jika X ialah suhu cecair lebih daripada 50°C mempunyai fungsi taburan kumulatif sebagai,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1 \ . \end{cases}$$

Dapatkan (i) $P(X \le 0.5)$;
(ii) $P(X > 0.2)$ dan
(iii) $P(0.2 < X \le 0.5)$.

(30%)

(b) Unit Komputer, USM membeli komputer-komputer peribadi sebanyak 20% dari pembekal A, 30% dari pembekal B dan 50% dari pembekal C. Katakan diketahui bahawa komputer-komputer yang dibeli daripada pembekal-pembekal A, B dan C itu mengalami kecacatan masing-masing sebanyak 0.05%, 0.02% dan 0.01%.

(i) Berapa peratuskah komputer-komputer yang dibeli itu adalah cacat?

(ii) Jika satu komputer yang dibeli itu dipilih secara rawak dan didapati cacat, apakah kebarangkalian komputer itu datangnya dari pembekal C?

(30%)

(c) Paras pencemaran (y unit) dan kelembapan (%) di bandar Seri Iskandar dicatat pada waktu tengahari selama 10 hari berturut-turut adalah seperti di dalam jadual berikut:

Hari :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x :	77	95	30	45	85	50	65	60	63	82
y :	1.5	4.0	0.5	1.4	2.0	0.8	2.5	2.0	1.7	2.8

Lakarkan data pada kertas graf. Dapatkan jangkaan kuasa dua terkecil bagi garis regresi data tersebut. Dengan menggunakan garis regresi yang diperolehi itu, carilah paras pencemaran bila kelembapannya ialah 75%.

(40%)

6. (a) Katakan X tertabur secara Poison dengan f.k.k,

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{untuk } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tunjukkan bahawa min dan varians bagi X ialah λ.

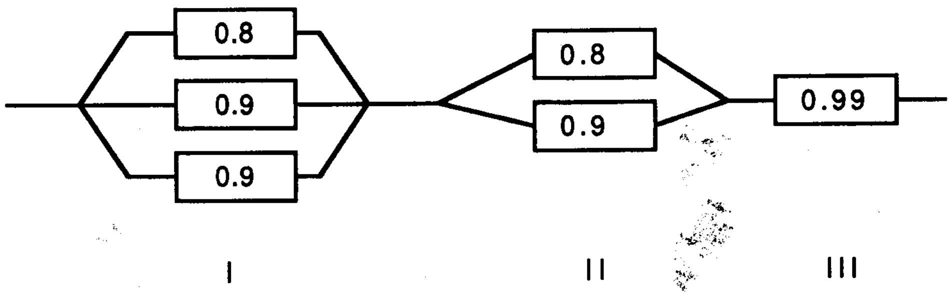
Katakan bilangan panggilan telefon di pejabat UPA dalam satu hari ialah pembolehubah rawak X dengan f.k.k,

$$p(X = x) = \frac{9^x e^{-9}}{x!} \quad \text{untuk } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Berapakah jangkaan bilangan panggilan telefon pada hari itu? Carilah juga varians bagi bilangan panggilan itu.

(30%)

(b) Pertimbangkan gambarajah suatu sistem elektronik di bawah yang menunjukkan kebarangkalian komponen-komponen sistem itu beroperasi. Sistem itu akan beroperasi sepenuhnya jika pemasangan III dan sekurang-kurangnya satu komponen dari I dan II beroperasi. Anggapkan bahawa komponen-komponen bagi setiap pemasangan dan di antara pemasangan beroperasi secara bebas. Apakah kebarangkalian sistem itu beroperasi?



(40%)

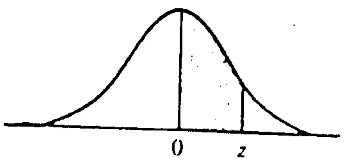
(c) Tentuan-tentuan bagi sejenis keluli memerlukan min kekuatan alah 180 kN/mm^2. Jika 5 bar keluli dipilih secara rawak mempunyai min kekuatan alah $\bar{x}$ = 169.5 dan sisihan piawai s = 5.7, ujilah hipotesis nul μ_o = 180 kN/mm^2 melawan hipotesis alternatif μ_1 < 180 kN/mm^2 pada paras keertian α = 0.01 dan bincangkan keputusan anda.

(30%)

- oooOooo -

Sifir Luas Taburan Normal Piawai

Nilai pemasukan ialah kebarangkalian di antara $z = 0$ dan suatu nilai z yang positif. Luas untuk nilai z yang negatif diperolehi dari prinsip simetri.

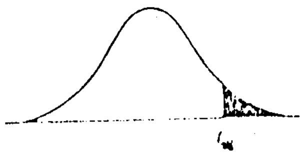


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	07	.08	09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	0279	0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	0636	0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	1064	1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	1443	1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	1808	1844	1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	2157	.2190	2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	2486	2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	3770	.3790	3810	3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	3962	.3980	.3997	4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	4406	4418	.4429	4441
1.6	.4452	.4463	.4474	4484	.4495	.4505	4515	4525	4535	4545
1.7	.4554	.4564	.4573	4582	.4591	.4599	.4608	4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	4693	.4699	4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	4750	4756	4761	4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	4793	.4798	4803	4808	.4812	4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	4911	.4913	4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	4931	.4932	.4934	4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	4979	4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	4985	4985	4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	4989	4989	4989	4990	4990

LAMPIRAN II

Sifir Taburan-t

Nilai t_α untuk kebarangkalian
yang diberikan



Darjah Kebebasan	Kebarangkalian utk. nilai yg. lebih besar				
	.1	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.290	1.661	1.980	2.358	2.626
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Lampiran III.

Jadual Jelmaan Laplace.

Fungsi Asal	Jelamaan Laplace	
$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n, n integer positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$	$s > k$
$t^n e^{kt}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$	$s > k$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k \rvert$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k \rvert$