UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1990/91

Mac/April 1991

EUM 102 - Matematik Kejuruteraan II

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 10 muka surat beserta Lampiran (2 mukasurat) bercetak dan ENAM(6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana LIMA(5) soalan sahaja.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

...2/-

BAHAGIAN A (PERSAMAAN PEMBEZAAN BIASA DAN JELMAAN LAPLACE)

1. Tentukan fungsi $y = f(x)$ bagi mana-mana EMPAT(4) daripada bahagian berikut:-

(a) $yy' = (xy)^2 + y^2 - x^2 - 1,\ y(0) = 2$

(b) $y' = 2yx^{-1} + xy^{-1},\quad y(1) = 1$

(c) $y'' - 4y' + 3y = \sin(x),\quad y(0) = y'(0) = 0.$

(d) $-x^3 y''' + 3x^2 y'' - 6xy' + 6y = 0,\quad y(1) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 1,$

(e) $yy'' + y'y' = \sin(x),\quad y(0) = y(\pi/2) = 1$

(100%)

Bagi soalan 2 , jawab SAMADA bahagian I ATAU bahagian II

SAMADA

BAHAGIAN I

(Jikalau anda jawab bahagian ini, jangan jawab bahagian II)

2. (a) Tunjukkan bahawa persamaan pembezaan biasa (PPB)

$$y = x\,F(y') + G(y'),\quad y = y(x),$$

(F dan G ialah fungsi sesuai yang mengandungi $y' = dy/dx$.)

boleh ditulis semula sebagai PPB linear

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\frac{dF}{dp}}{p - F(p)} + \frac{\frac{dG}{dp}}{p - F(p)},$$

di mana $p = dy/dx$.

(Petunjuk: Bezakan kedua-dua belah persamaan asal terhadap x .)

(50%)

(b) Pertimbangkan masalah menyelesaikan PPB tak linear

$$y = 2x \frac{dy}{dx} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

(i) Guna bahagian (a) di atas untuk menulis PPB tak linear ini sebagai satu PPB linear yang mengandungi fungsi $x = x(p)$ dan terbitan dx/dp.

(20%)

(ii) Selesaikan PPB linear dalam bahagian (i) di atas untuk mendapat satu ungkapan umum bagi $x = x(p)$. Kemudian, cari $y = y(p)$.

(Petunjuk: Penyelesaian umum bagi $y'(x) + f(x)\,y(x) = r(x)$ ialah $y = \exp(-H(x))\ [\int r(x) \exp(H(x))\, dx + C]$ di mana C ialah pemalar dan $H(x) = \int f(x)\, dx$.)

(20%)

(iii) Diberi $y'(x) = 2$ apabila $x = 9$, guna bahagian (ii) di atas untuk menentukan penyelesaian $y = y(x)$ bagi masalah di sini.

(10%)

<u>ATAU</u>

<u>BAHAGIAN II</u>

(Jikalau anda sudah jawab bahagian I, jangan jawab bahagian ini.)

2. (a) Tunjukkan bahawa persamaan pembezaan biasa (PPB) tak linear

$$y'' + x(y')^3 = 0, \quad y = y(x),$$

boleh ditulis semula sebagai persamaan Airy

$$\frac{d^2x}{dy^2} = xy$$

...4/-

(Petunjuk : Anggap x sebagai satu fungsi yang mengandungi y, iaitu $x = x(y)$. Guna keputusan $dy/dx = 1/x'(y)$ untuk mendapat d^2y/dx^2.)

(50%)

(b) Andai bahawa persamaan Airy dalam bahagian (a) di atas mempunyai penyelesaian dalam bentuk siri.

$$x(y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m y^m ,$$

di mana C_m ialah pekali malar.

(i) Tunjukkan bahawa

$$C_{2+3m} = 0 \qquad \text{bagi } m = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

(20%)

(ii) Diberi $x = dx/dy = 1$ bila $y = 0$,
Cari nilai pekali C_0, C_1, C_3, C_4, C_6 dan C_7.

(30%)

Bagi soalan 3, jawab SEMUA bahagian.

3. Jelmaan Laplace bagi fungsi $f(t)$ $(t \geq 0)$ diberi oleh

$$L\{ f(t) ; s \} = \int_0^\infty f(t) \exp(-st)\, dt .$$

(a) Tentukan $F(s) = L\{ h(t) \; ; \; s\}$ jikalau

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{jika } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{jika } t > 1 \end{cases}$$

Nyatakan syarat yang diperlu untuk $F(s)$ wujud.

(30%)

(b) Jikalau $L\{ g(t) \, ; s\} = s^{-m} (s+1)^{-1}$,
di mana $m \geq 1$ ialah integer, tunjukkan bahawa

$$g(t) = (-1)^m \exp(-t) + \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{p+1} \; t^{m-p}}{(m-p)!}$$

(Petunjuk : Anda boleh guna keputusan $L\{\exp(at) \, ; s\} = (s-a)^{-1}$ dan

$$L\{ \int_0^t f(u)\, du \, ; s \} = s^{-1} \; L\{f(t) \, ; s\}.)$$

(30%)

(c) Selesaikan $y'(t) + y(t) = h(t)$, di mana $h(t)$ ialah seperti yang diberi dalam bahagian (a) di atas, jikalau $y(0) = 0$.

(Petunjuk: Anda boleh guna bahagian (a) dan (b) di atas dan keputusan $L\{ f'(t) \, ; s\} = s \; L\{ f(t) \, ; s\} - f(0)$ dan $L\{ u_a(t) f(t-a) \, ; s\} = \exp(-as) \; L\{f(t) \; ; s\}$, di mana $u_a(t)$ ialah fungsi langkah yang ditakrif oleh

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{jika } t < a \\ 1 & \text{jika } t > a \end{cases}$$

(40%)

BAHAGIAN B - KEBARANGKALIAN DAN STATISTIK

4. (a) Satu litar boleh lentur dipilih secara rawak dari suatu pengeluaran yang mengadungi 1000 litar. Litar-litar yang cacat dibahagikan kepada tiga jenis kecacatan yang berbeza dan ditandakan sebagai jenis A, B dan C. Didapati peratusan litar yang mempunyai kecacatan jenis A, B, dan C masing-masingnya ialah 2%, 1% dan 1.5%. Juga diketahui bahawa peratusan litar yang mempunyai kecacatan jenis A dan B ialah 0.5%, jenis A dan C ialah 0.6% dan jenis B dan C ialah 0.4%, manakala peratusan litar yang mempunyai ketiga-tiga jenis kecacatan ialah 0.2%. Apakah kebarangkalian litar yang dipilih itu mempunyai sekurang-kurangnya satu jenis kecacatan?.

(30%)

(b) Perimbangkan fungsi ketumpatan kebarangkalian (f.k.k),

$$f(y) = \begin{cases} k \sin y, & 0 \le y \le \pi/2 \\ 0 & \text{lain-lain} \end{cases}$$

Cari nilai k supaya f(y) benar-benar f.k.k. Dapatkan min dan varians bagi y.

(30%)

(c) Model yang menerangkan perhubungan di antara pembolehubah bebas x dan pembolehubah sambutan y diberi oleh,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e .$$

e ialah ralat rawak yang mempunyai min sifar dan varians σ^2

Diberi suatu sampel pasangan nilai pembolehubah rawak x dan y, $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)\}$. Tunjukkan bahawa anggaran kuasadua terkecil bagi β_0 dan β_1 ialah,

$$\hat{\beta}_o = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

dan

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Sxy}{Sxx}$$

Sxx dan Sxy diberi oleh rumus berikut:

$$Sxx = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right]^2$$

dan

$$Sxy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

Seorang Jurutera Kimia sedang mengkaji kesan suhu ke atas suatu hasil pengeluaran. Keputusan kajian itu adalah seperti berikut:

Suhu ^oC(x)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Hasil, % (y)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

Dapatkan anggaran kuasadua terkecil bagi garis regresi data tersebut. Lakarkan garis regresi ini bersama dengan data mentah di atas kertas geraf. Cari juga pekali sekaitan di antara suhu dan hasil pengeluaran yang dikaji itu.

(40%)

...8/-

5. (a) Tatacara ujian penerimaan 25 tiub T.V warna dari sebuah kotak adalah seperti berikut: 5 tiub dipilih secara rawak tanpa pengembalian dan kemudian diuji. Jika kurang atau sama dengan 2 tiub gagal berfungsi, baki kesemua tiub tersebut boleh diterima. Anggapkan kotak itu mengandungi 4 tiub yang rosak.

(i) Apakah kebarangkalian kesemua tiub itu diterima?

(ii) Katakan penerimaan tiub-tiub itu dikira dari taburan binomial dengan $p = 4/25$. Apakah kebarangkalian kesemua tiub itu diterima?

(40%)

(b) Masa (dalam jam) yang diperlukan untuk membaiki sejenis alat ialah pembolehubah rawak z dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian.

$$f(z) = \begin{cases} 1/3\, e^{-(z/3)} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

Apakah jangkaan masa yang diperlukan untuk membaiki alat itu? Apakah sisihan piawai bagi z?

(20%)

(c) Sebuah kilang yang mengeluarkan gelang omboh (piston rings) untuk enjin kereta mendapati garispusat gelung itu tertabur secara normal dengan sisihan piawai $\sigma = 0.001$mm. Suatu sampel rawak bersaiz 15 dipilih dan didapati min garispusat gelang itu ialah $\bar{x} = 74.036$mm.

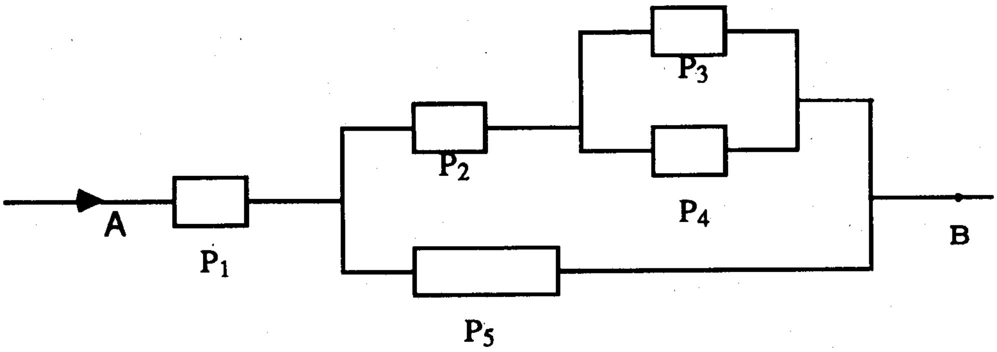
(i) Bina 99% selang keyakinan dua hujung bagi min garispusat gelang omboh itu.

(ii) Bina 95% had bawah keyakinan bagi min garispusat gelung omboh itu.

(iii) Ujilah hipotesis nul, $\mu_o = 74.035$mm melawan hipotesis alternatif, $\mu_1 \neq 74.035$ mm pada aras keertian $\alpha = 0.01$.

(40%)

6. (a) Pertimbangkan pemasangan sistem bersiri dan selari di bawah. Nilai P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) ialah kebolehharapan untuk setiap komponen i, iaitu P_i = kebarangkalian komponen i berfungsi. Anggapkan bahawa komponen-komponen bagi setiap pemasangan dan di antara pemasangan beroperasi secara bebas dan sistem akan gagal hanya bila laluan dari A ke B itu putus. Nyatakan kebolehharapan pemasangan sistem ini beroperasi dalam sebutan P_1, P_2, P_3, P_4, dan P_5.



(30%)

(b) Katakan x pembolehubah rawak diskrit dengan fungsi taburan kumulatif ,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ .1 & 1 \le x < 3 \\ .4 & 3 \le x < 5 \\ .9 & 5 \le x < 5.5 \\ 1.0 & x \ge 5.5 \end{cases}$$

(i) Cari $p(x \le 3)$, $p(x = 3.5)$ dan $p(1.5 < x \le 5.2)$.

(ii) Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi x.

(iii) Dapatkan min dan varians bagi x.

(40%)

(c) Peratus sekerap yang dikeluarkan dari suatu operasi akhir logam dijangkakan kurang dari 7.2 peratus. [Peratus sekerap yang dikeluarkan dari operasi itu dihitung untuk beberapa hari yang dipilih secara rawak] . Data peratus sekerap itu adalah seperti berikut:

5.51%	7.32%
6.49%	8.81%
6.46%	8.56%
5.37%	7.46%

Pada pendapat anda, adakah benar min peratus sekerap itu kurang dari 7.2%.

(30%)

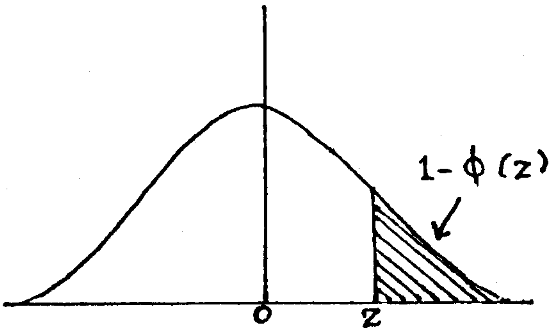
- oooOooo -

LAMPIRAN 1

Sifar Luas Taburan Normal Piawai

Nilai pemasukan ialah kebarangkalian di antara suatu nilai z yang positif dan suatu nilai tak terhingga. Iaitu

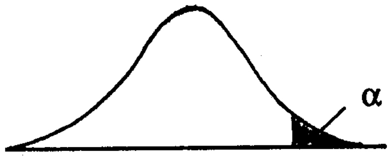
$$1 - \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz .$$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.1918	.0901	.0885	.0868	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.1618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00537
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00817	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

Siri Taburan -t

Nilai t_{α} untuk kebarangkalian yang diberikan.



$t_{\alpha,v}$

Darjah Kebebasan, V	Kebarangkalian untuk nilai yang lebih besar				
	.1	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.290	1.661	1.981	2.358	2.626
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576